Kognitive Systeme – Übung 1

27.05.2019 – Signalverarbeitung und Klassifikation

Stefan Constantin

KIT, Institute for Anthropomatics and Robotics, Department of Informatics, Interactive Systems Laboratories

Aufgabe 1: Faltung

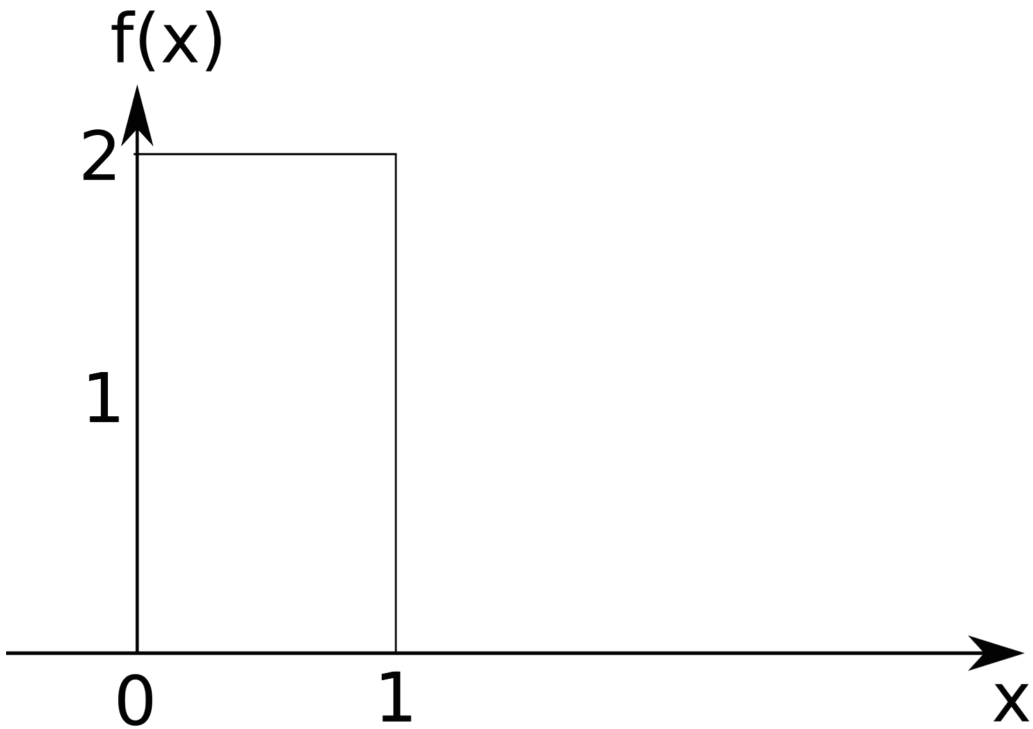
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen

Aufgabe 3: Filtern

Aufgabe 4: Diskrete Fouriertransformation, Sampling

Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

- Bestimmen Sie die Faltung der Funktion f(x) mit sich selbst rechnerisch.



Aufgabe 1: Faltung
a) rchnerische Faltung (graphische Faltung als Hilfestellung)

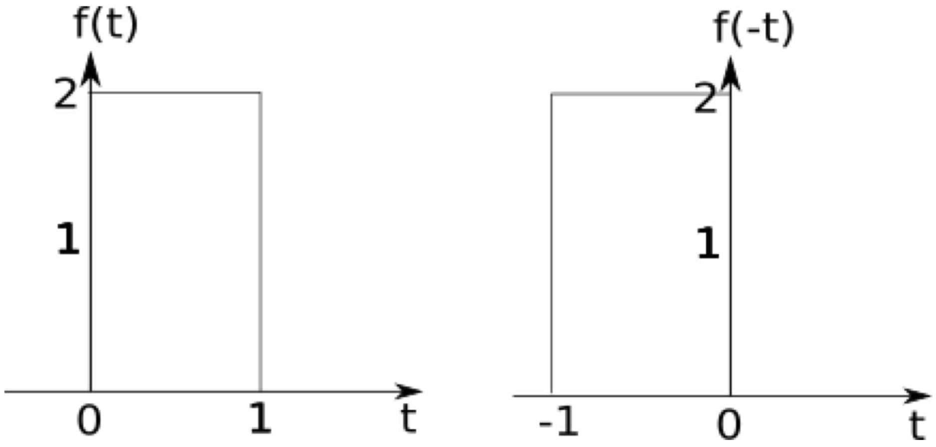
- Nur für einfache Funktionen möglich

- Vorgehen
  - Spiegelung einer der beiden Funktionen
  - Verschiebung der Funktion ins „Negative“, bis Funktionen sich nicht mehr überlappen (Faltung ist 0)
  - Schrittweise Verschiebung der Funktion nach rechts und Berechnung des aktuellen Werts der Faltung
  - „Interpolation” der Funktionswerte

Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

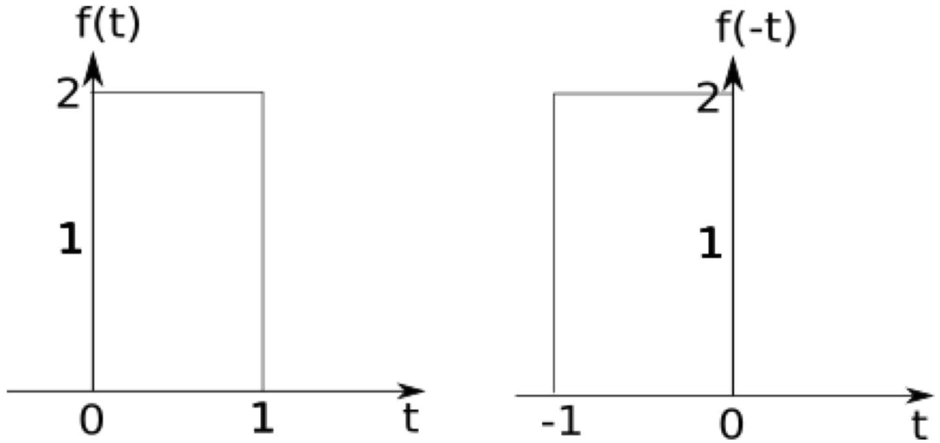
$$f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt$$

- 3 Fallunterscheidungen:



- Fall 1:

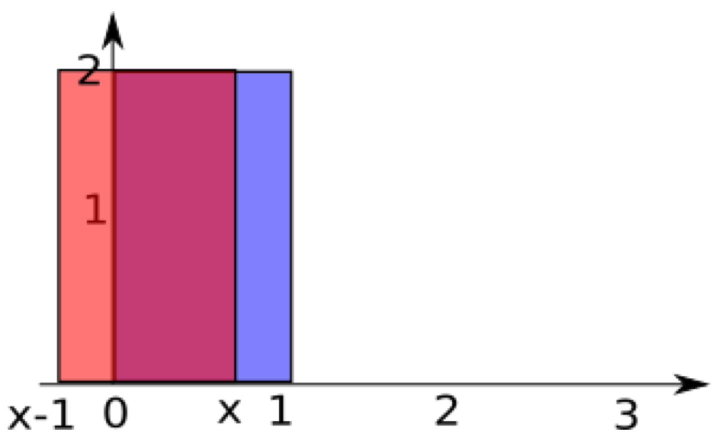
x < 0 oder x > 2 ➔ 0



- Fall 2:

$$0 \leq x < 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \int_{0}^{x} 4dt = 4x$$

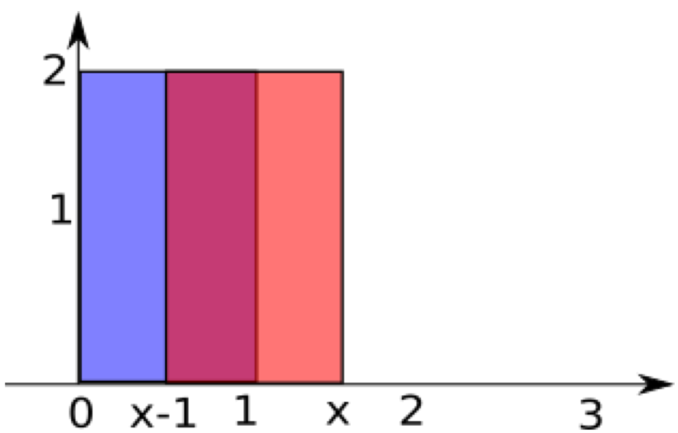


Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

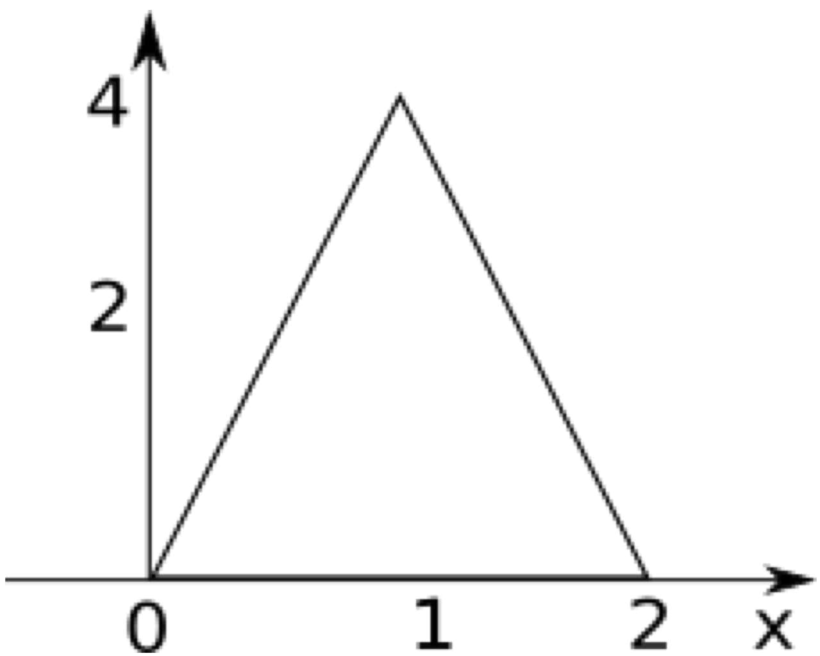
- Fall 3:

$$1 \le x \le 2 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \quad \int_{x-1}^{1} 4dt = -4x + 8$$



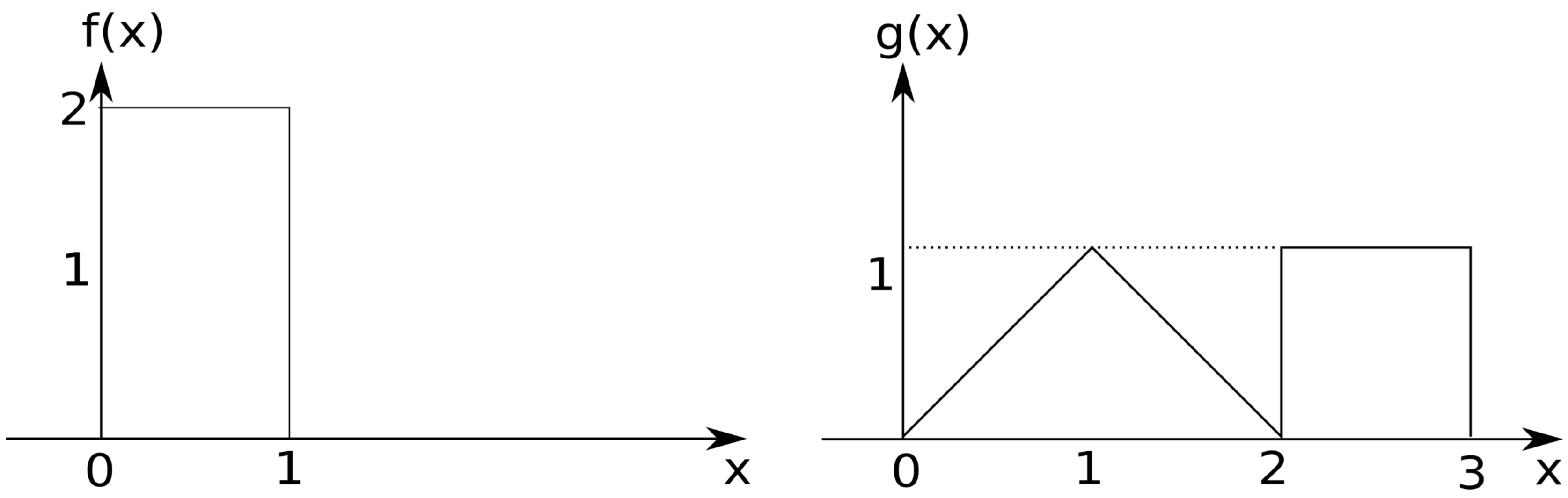
- Lösung:



$$\begin{cases} 4x, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -4x+8, & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Bestimmen Sie die Faltung graphisch.



Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

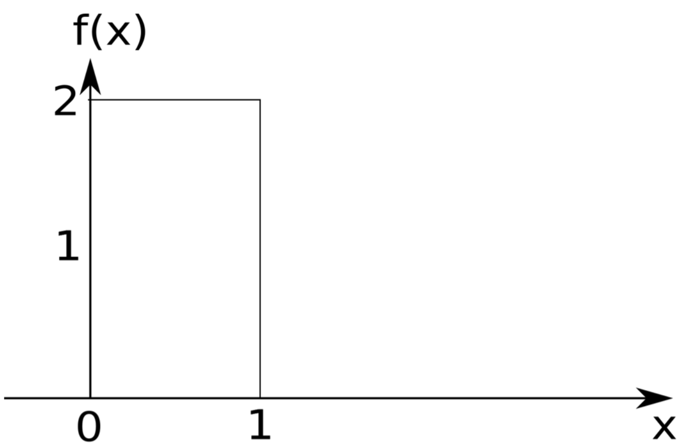
- Nur für einfache Funktionen möglich

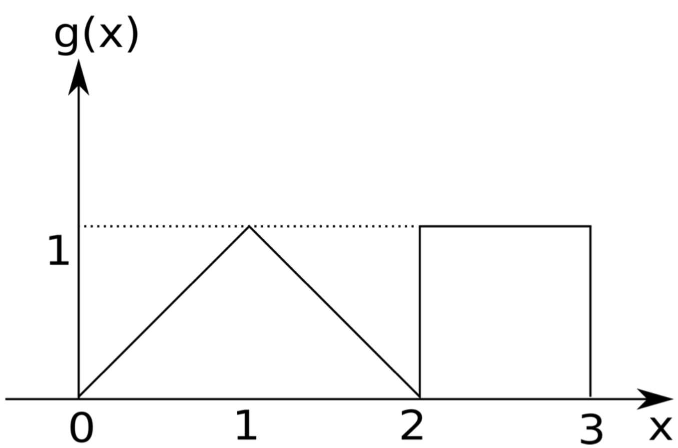
- Vorgehen
  - Spiegelung einer der beiden Funktionen
  - Verschiebung der Funktion ins „Negative“, bis Funktionen sich nicht mehr überlappen (Faltung ist 0)
  - Schrittweise Verschiebung der Funktion nach rechts und Berechnung des aktuellen Werts der Faltung
  - „Interpolation” der Funktionswerte

Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

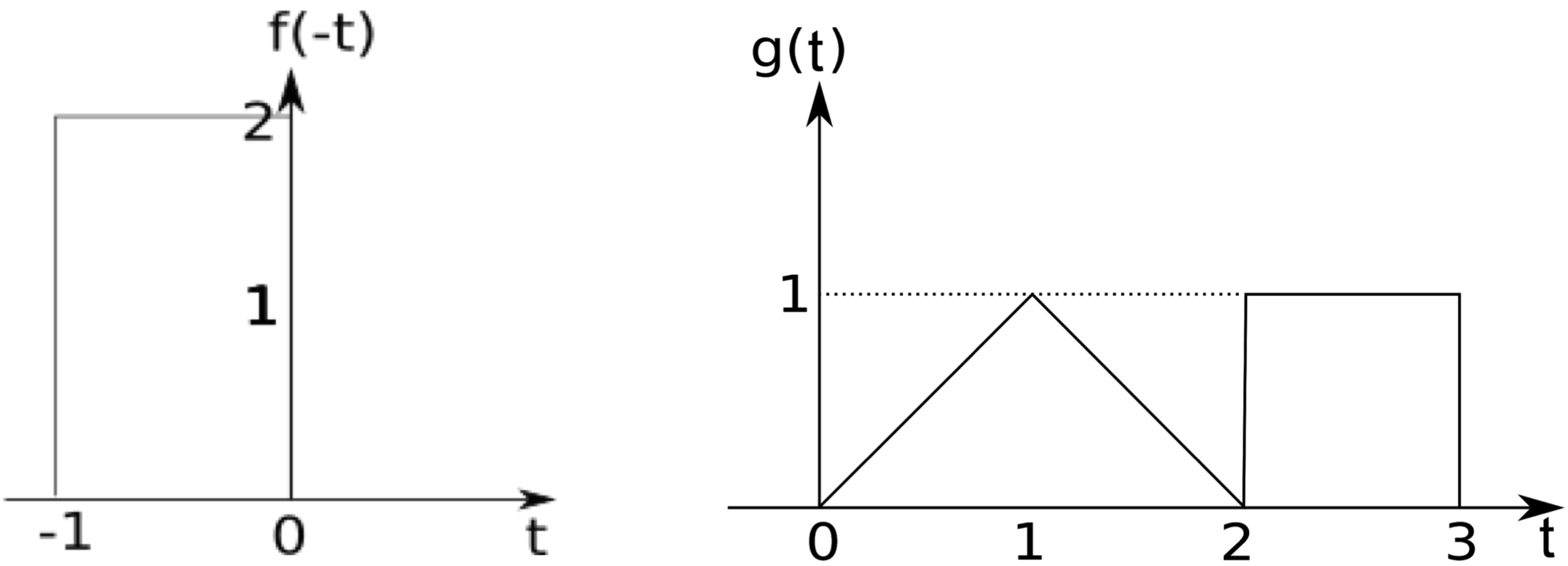
- 5 Fallunterscheidungen:





Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

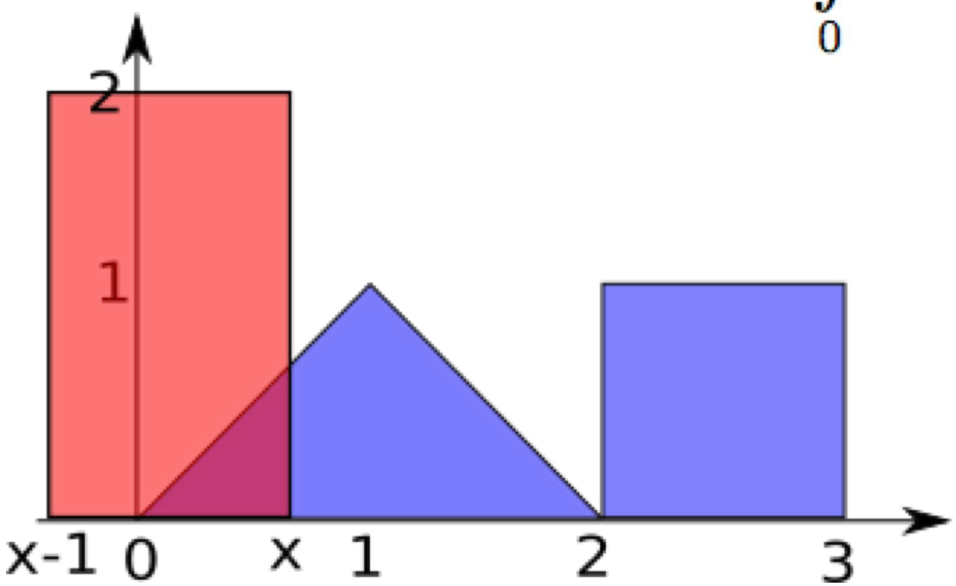
- Fall 1: $$x < 0 \quad \rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt = 0$$



- Fall 2:

$$0 \leq x < 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \quad \int_{0}^{x} 2t \cdot dt = \frac{x^2}{2} \cdot 2$$



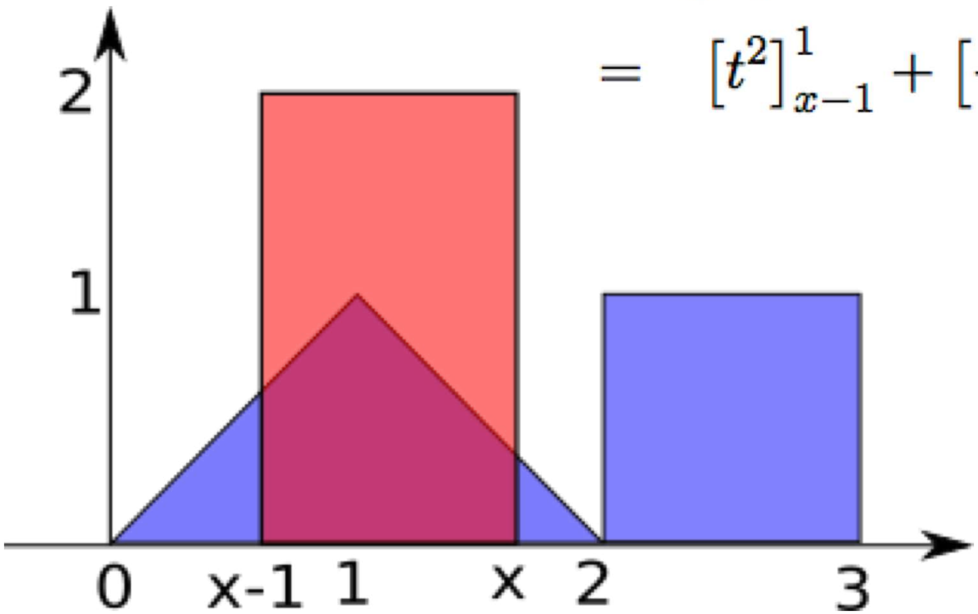
Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 3:

$$1 \leq x < 2 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \int_{x-1}^{1} 2t \cdot dt + \int_{1}^{x} (-2t+4) \cdot dt$$

$$= \left[t^2\right]_{x-1}^{1} + \left[-t^2+4t\right]_{1}^{x} = -2x^2+6x-3$$

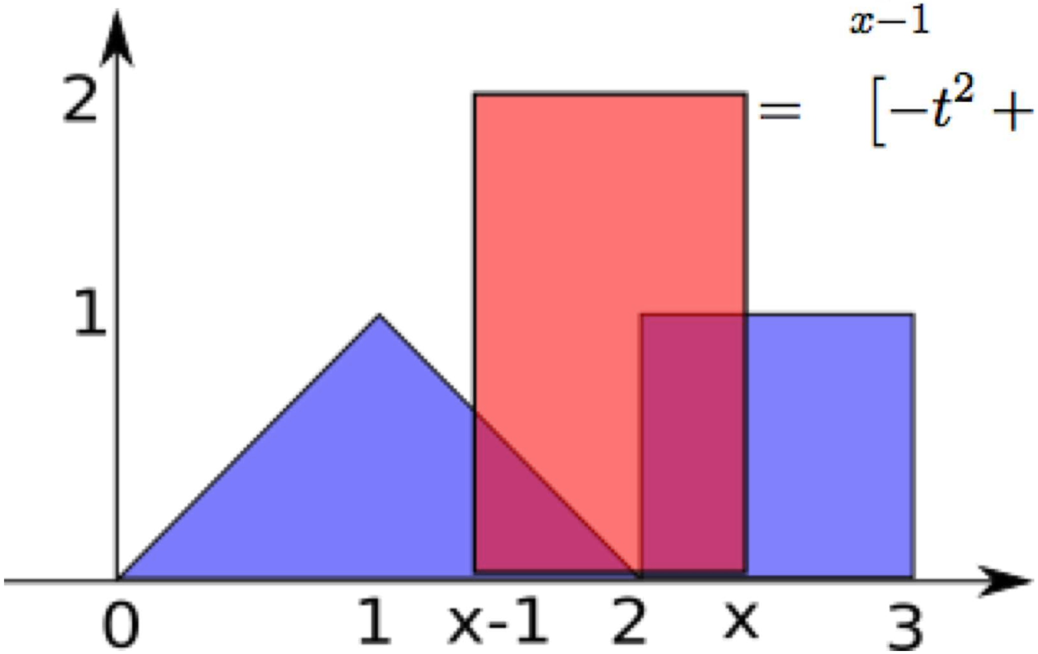


Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 4: $2 \leq x < 3 \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$

$$= \int_{x-1}^{2} (-2t+4) \cdot dt + \int_{2}^{x} 2 \cdot dt$$

$$= \left[-t^2 + 4t\right]_{x-1}^{2} + \left[2t\right]_{2}^{x} = x^2 - 4x + 5$$



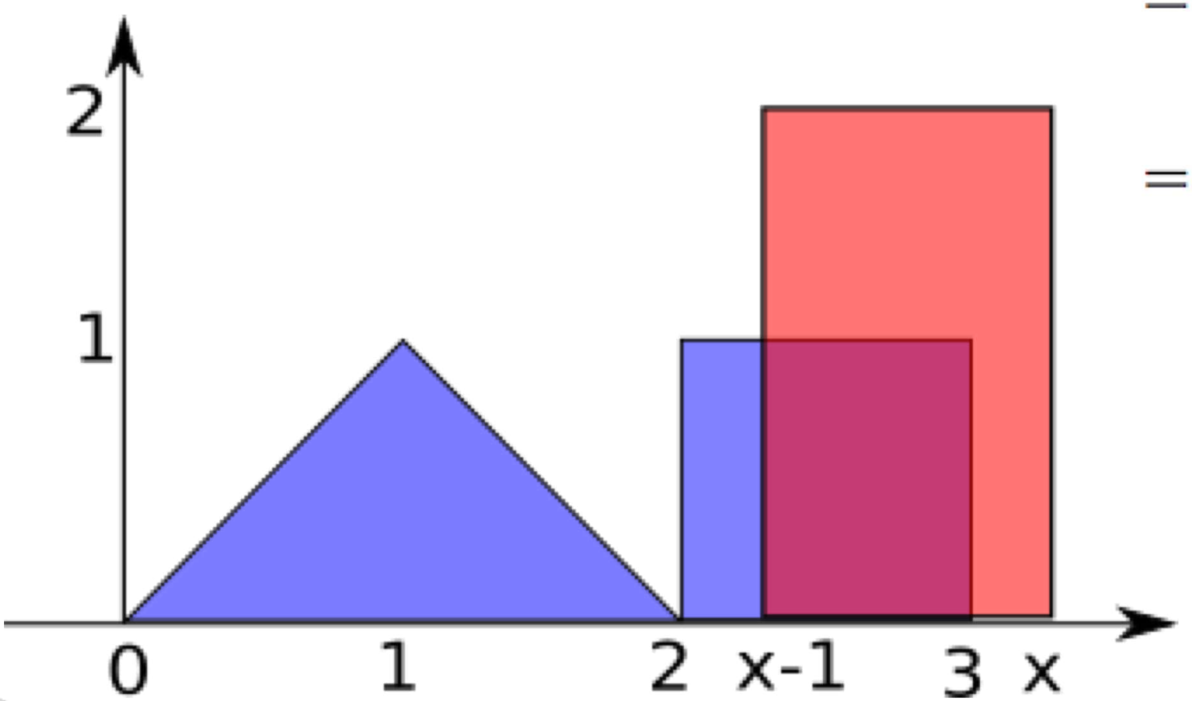
Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 5:

$$3 \leq x \leq 4 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

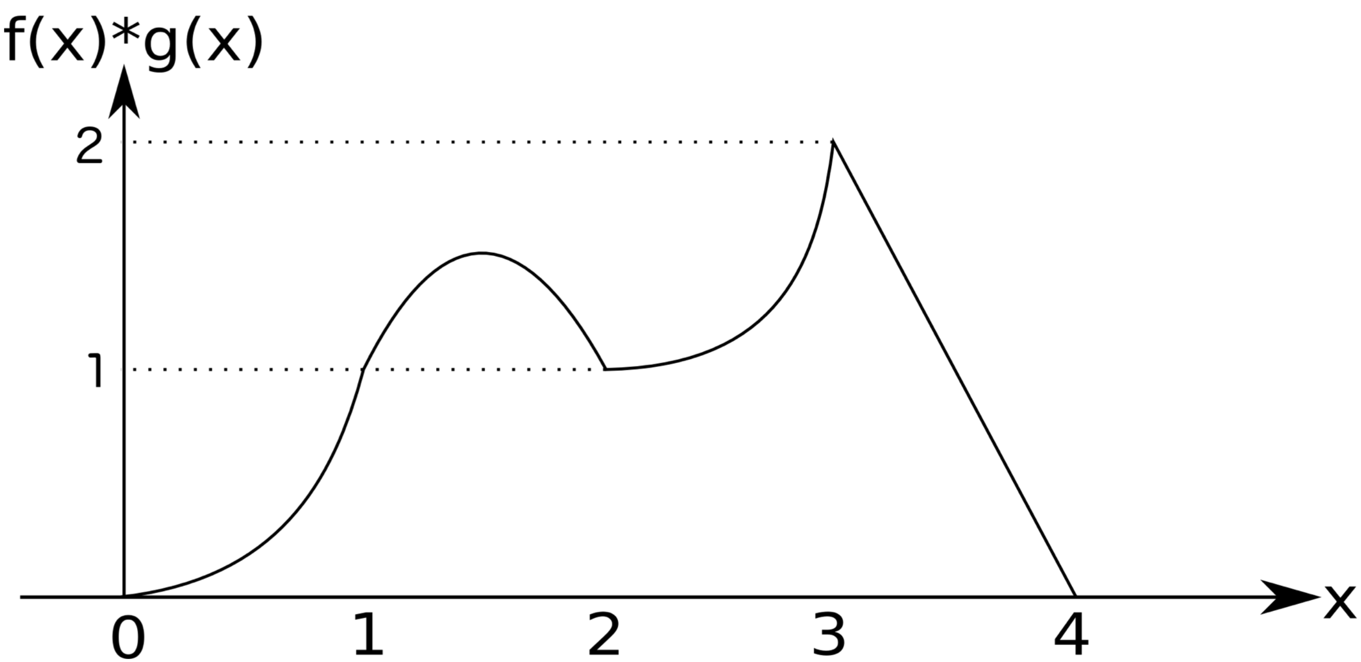
$$= \int_{x-1}^{3} 2 \cdot dt$$

$$= [2t]_{x-1}^{3} = -2x + 8$$



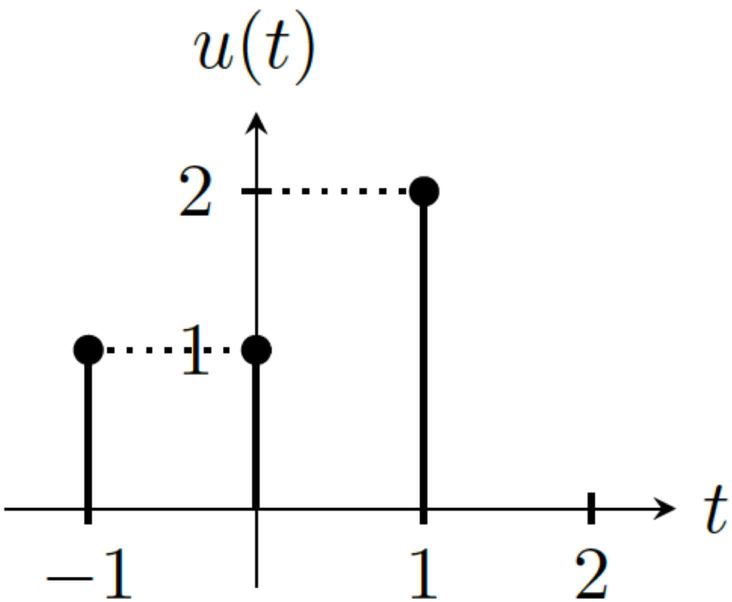
Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Lösung:



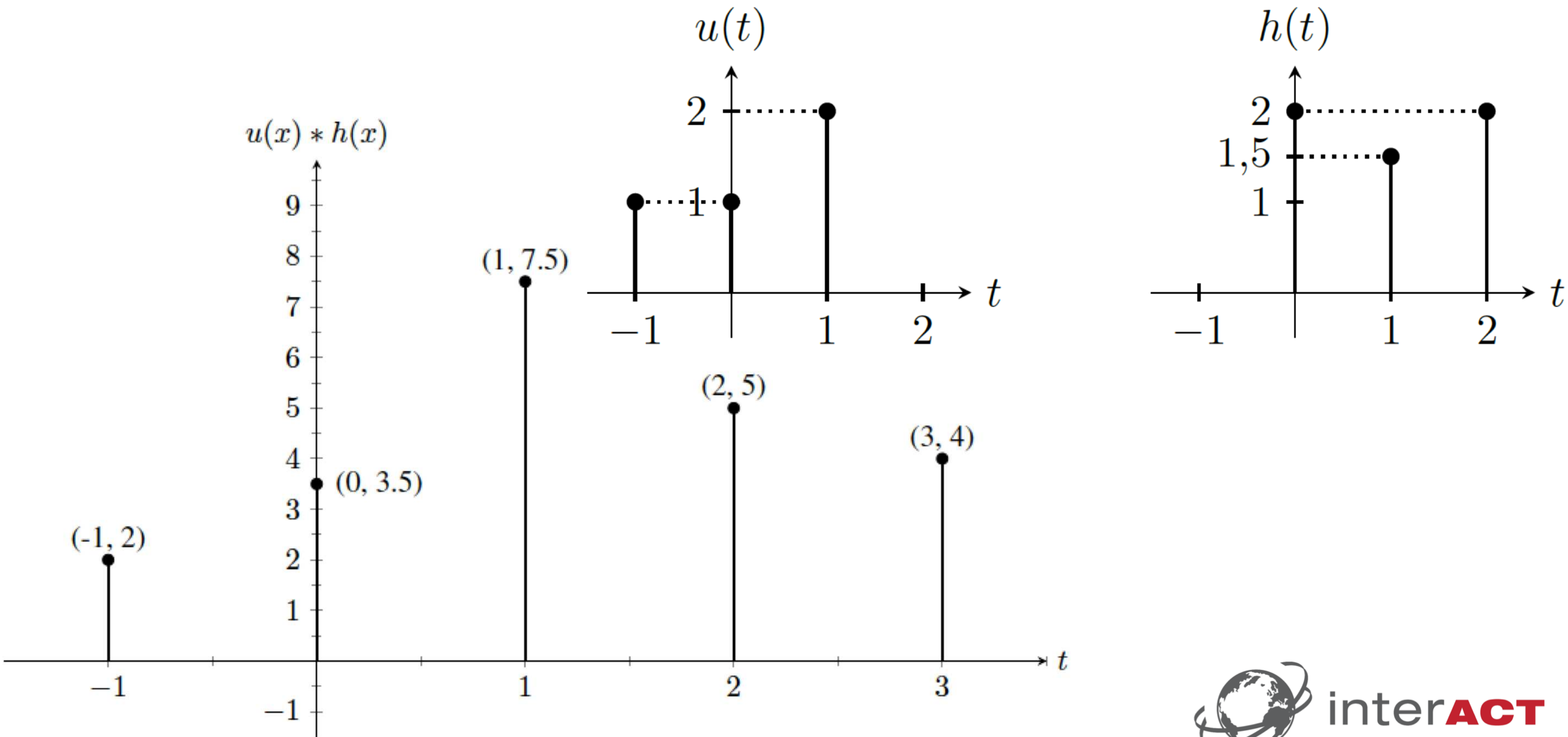
Aufgabe 1: Faltung
c) diskrete Faltung

- Bestimmen Sie die diskrete Faltung graphisch.



Aufgabe 1: Faltung
c) diskrete Faltung

$$u[x] * h[x] \quad = \quad \sum_{t=\infty}^{\infty} u[t] \cdot h[x-t]$$



Aufgabe 1: Faltung
Onlinefrage Nr. 1

Was ist der größte Wert des Ergebnisses der diskreten Faltung u(x) * h(x)?

i) 4,5

ii) 5,0

iii) 6,5

iv) 7,5

v) 9,0

Die korrekte Antwort ist iv) 7,5.

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

Zeichnen Sie das komplexe Spektrum

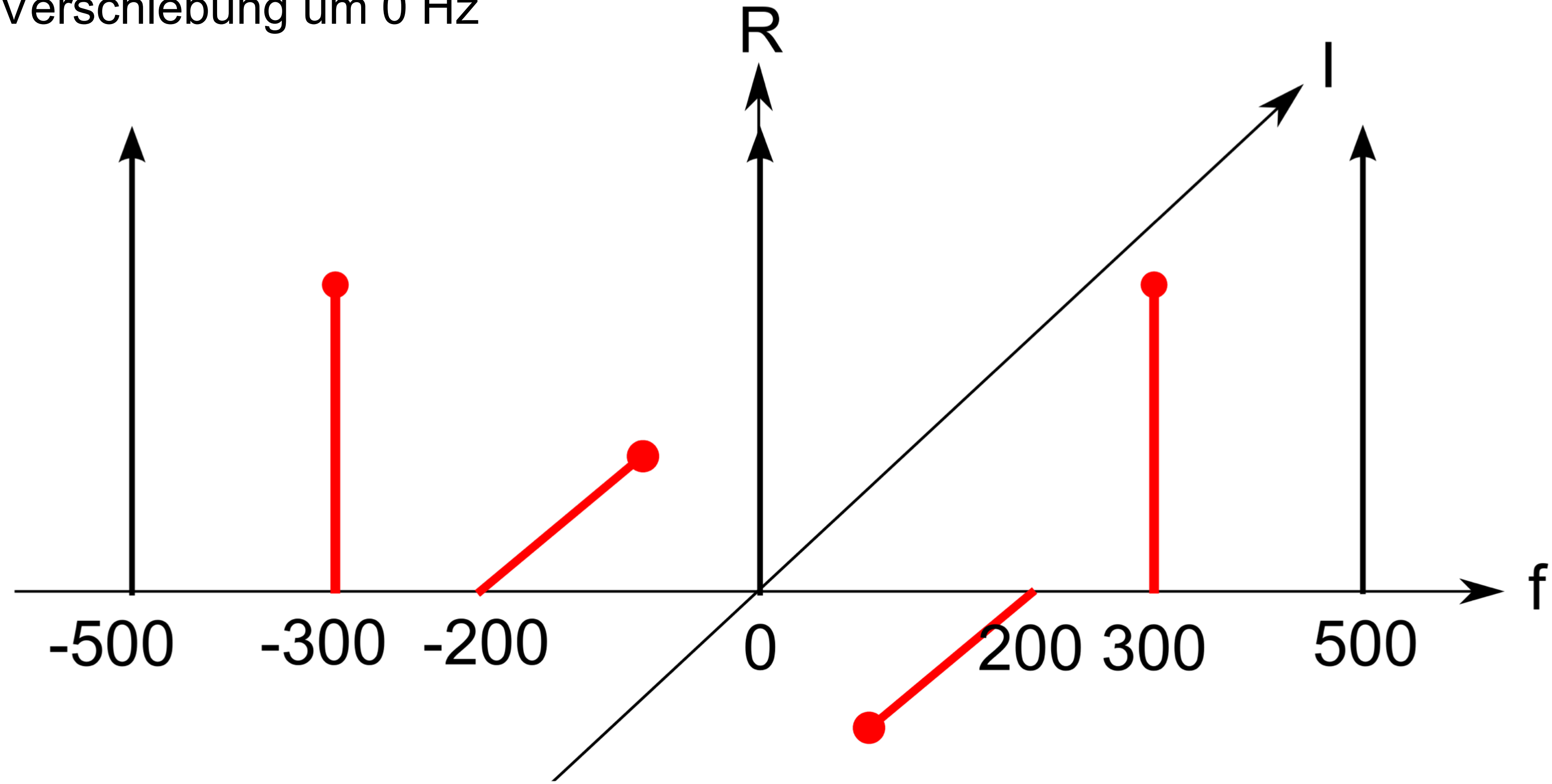
gegeben: $f(x) = \sin(2\pi 200 t) + 4\cos(2\pi 300 t)$

$$\begin{aligned} F(f) &= \frac{i}{2} \cdot (\delta(f+200) - \delta(f-200)) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+300) + \delta(f-300)) \\ &= \frac{i}{2} \cdot \delta(f+200) - \frac{i}{2} \cdot \delta(f-200) + 2 \cdot \delta(f+300) + 2 \cdot \delta(f-300) \end{aligned}$$

Funktion	Fouriertransformierte
$\sin(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{i}{2}(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0))$
$\cos(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-k/T)$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

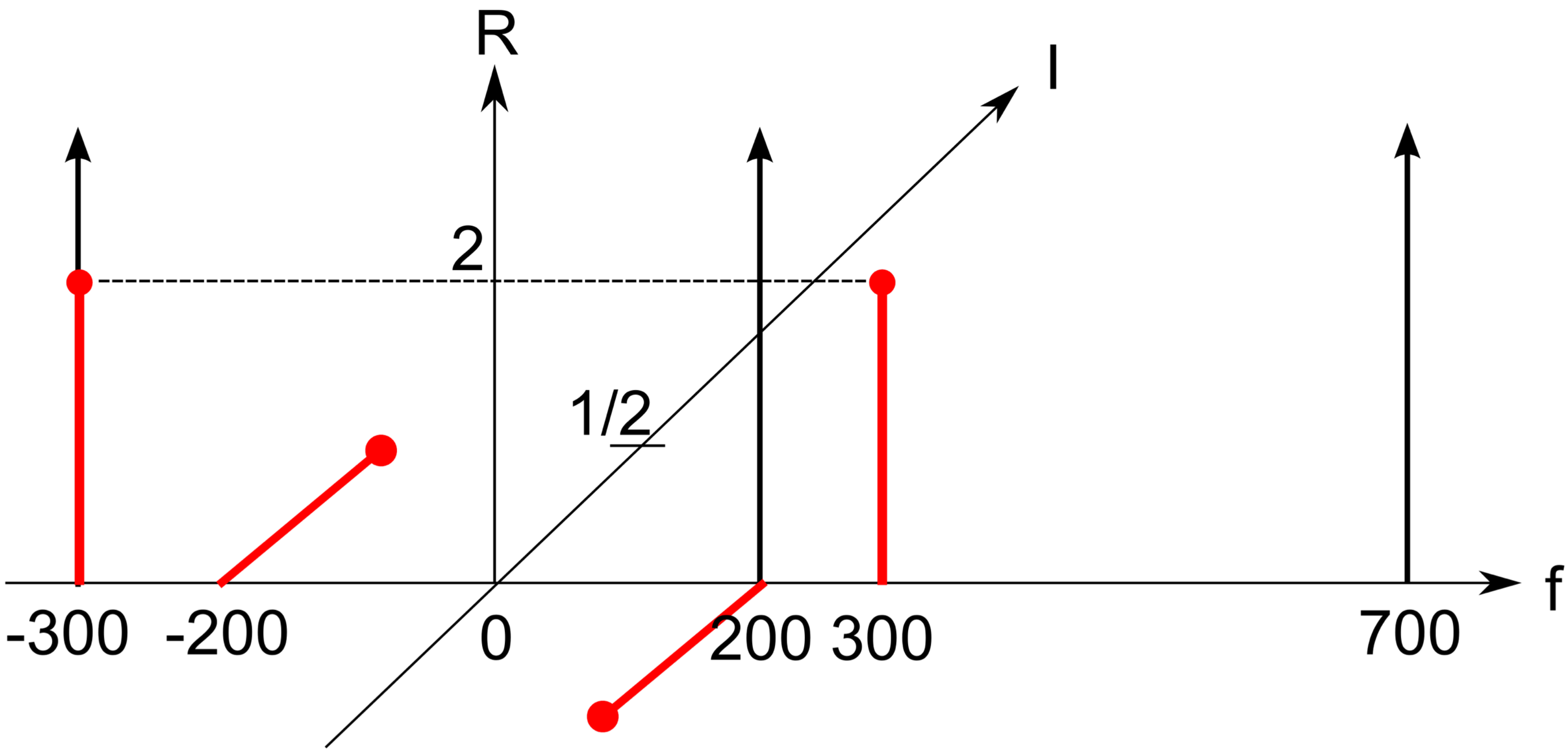
Verschiebung um 0 Hz



$$
\begin{aligned}
F(f) &= \frac{i}{2} \cdot (\delta(f+200) - \delta(f-200)) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+300) + \delta(f-300)) \\
&= \frac{i}{2} \cdot \delta(f+200) - \frac{i}{2} \cdot \delta(f-200) + 2 \cdot \delta(f+300) + 2 \cdot \delta(f-300)
\end{aligned}
$$

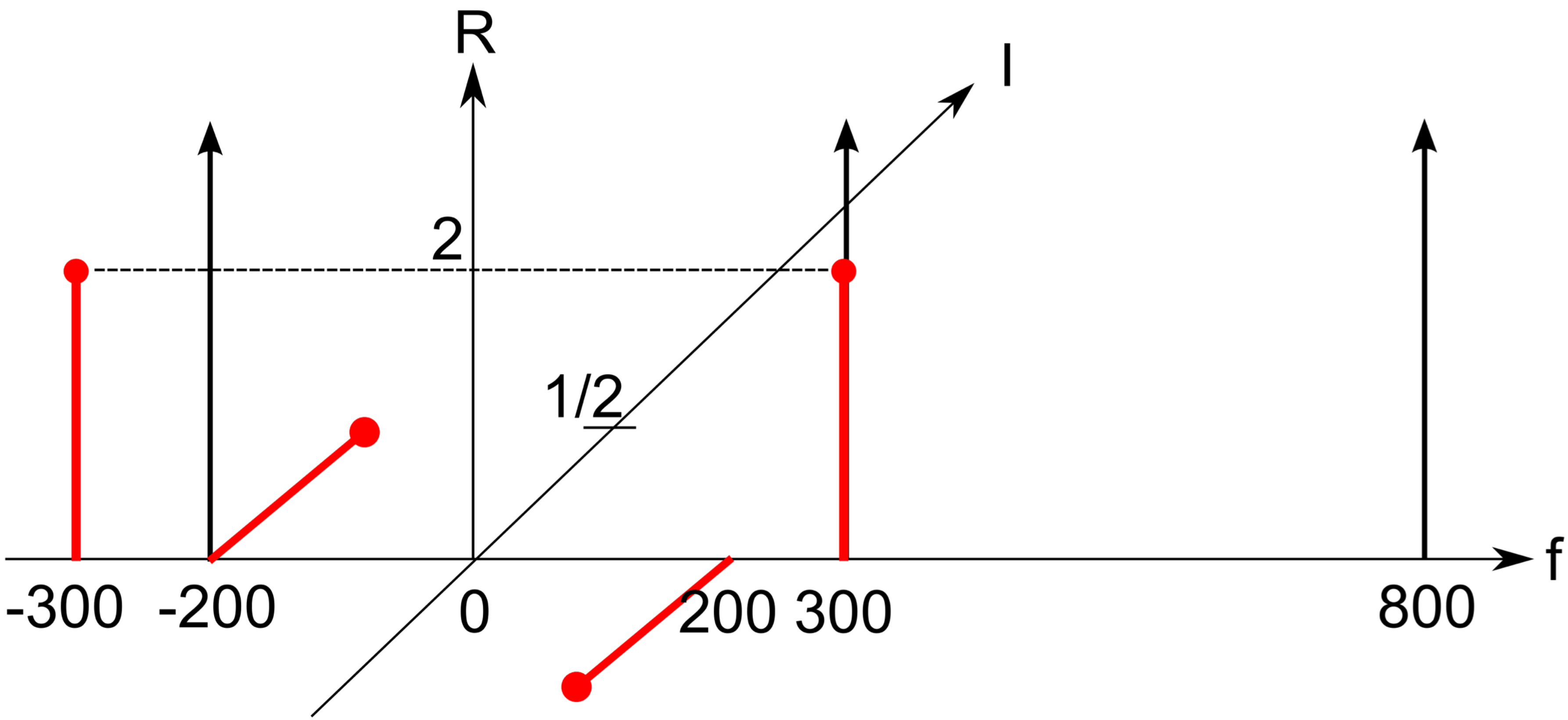
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

Verschiebung um 200 Hz



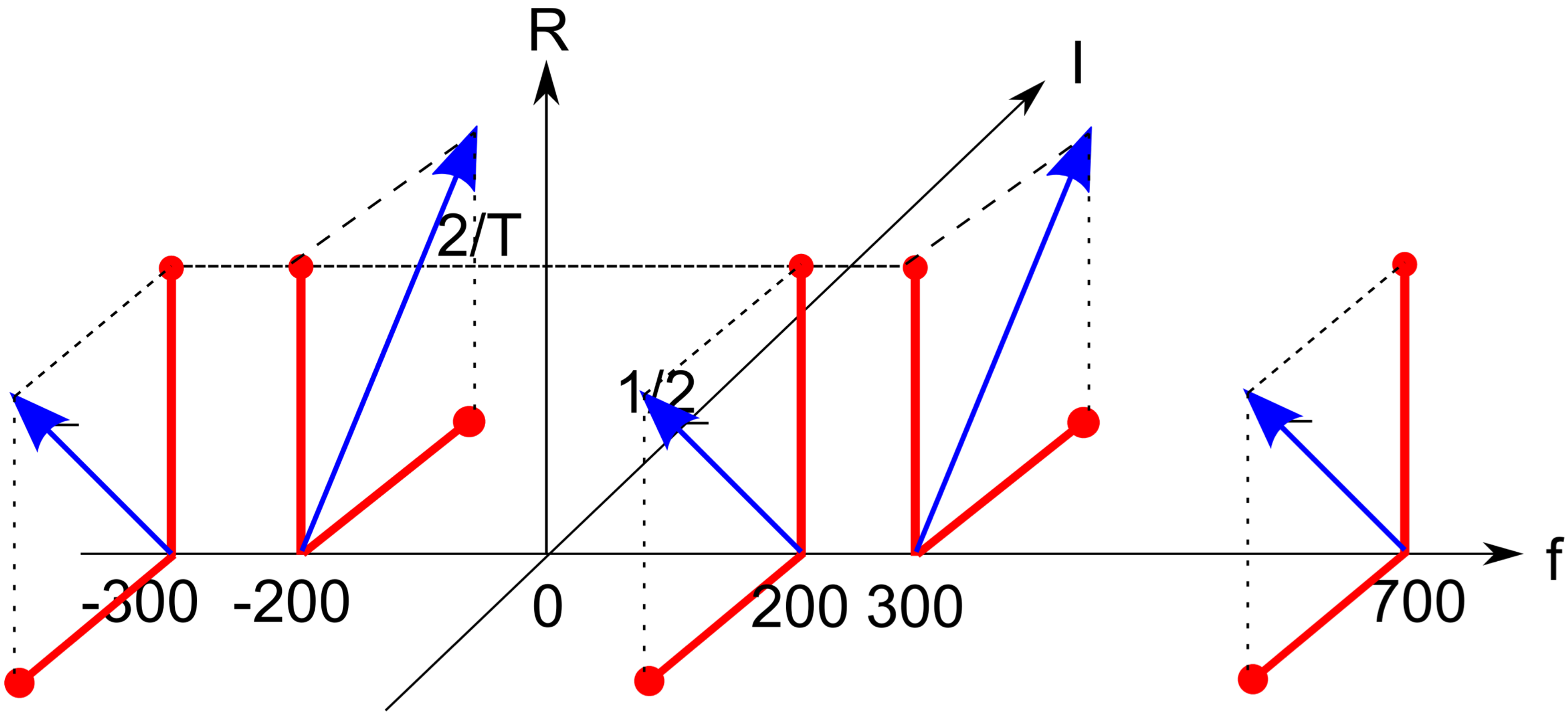
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

Verschiebung um 300 Hz



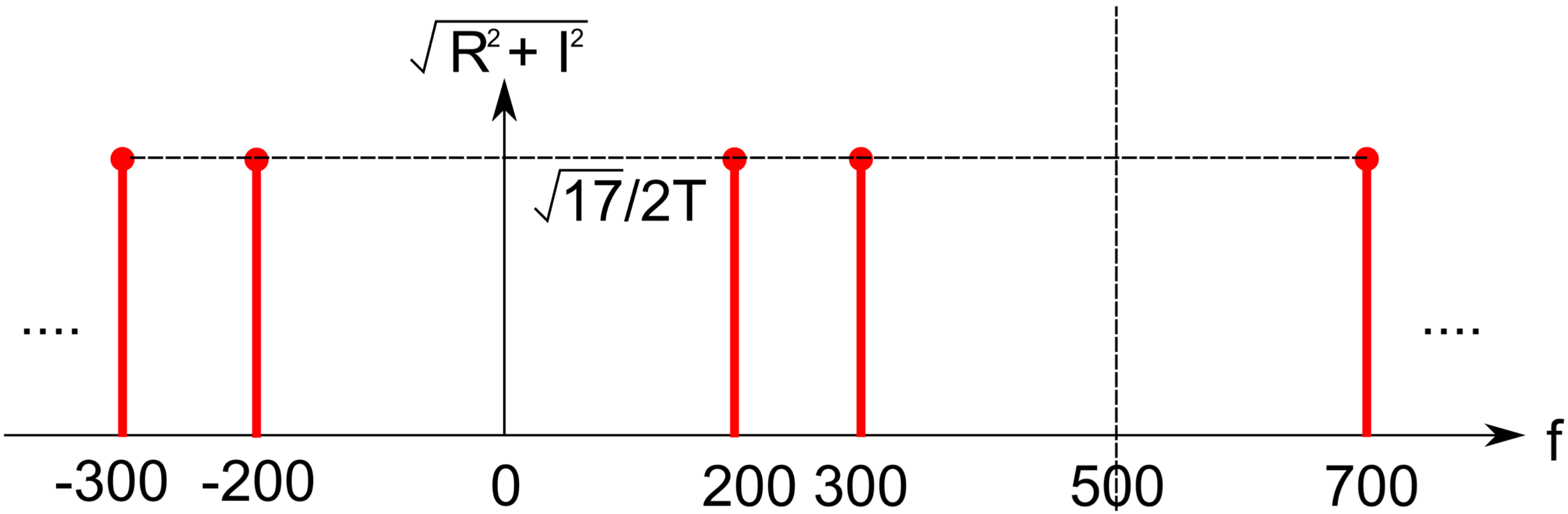
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

komplexes Spektrum nach der Abtastung



Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 500 Hz

Betragsspektrum nach der Abtastung



b) Aliasing

Es tritt Aliasing auf: Sich wiederholende Spektren überlagern sich, da Abtastfrequenz mit 500 Hz zu klein gewählt wurde (Verletzung des Abtasttheorems).

Hier: Überlagerung der Frequenzen des Realteils und Imaginärteils

Weitere denkbare Effekte:

Auftreten von im Originalsignal nicht vorhandener Frequenzen

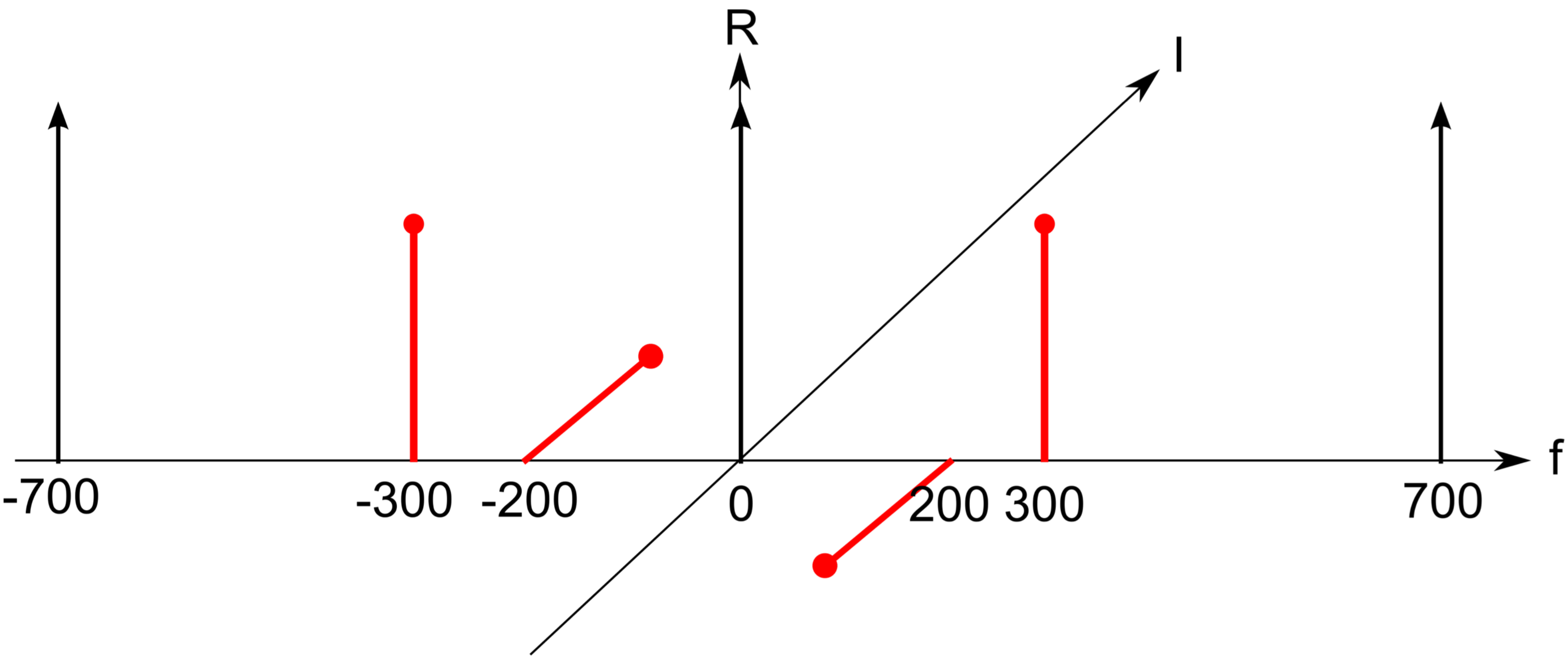
Verschwinden von im Originalsignal vorhandenen Frequenzen

Signal kann nicht mehr fehlerfrei rekonstruiert werden

Um Aliasing zu verhindern, muss als Abtastfrequenz eine Frequenz gewählt werden, die echt größer ist als das 2-fache der höchsten Frequenz im Signal.

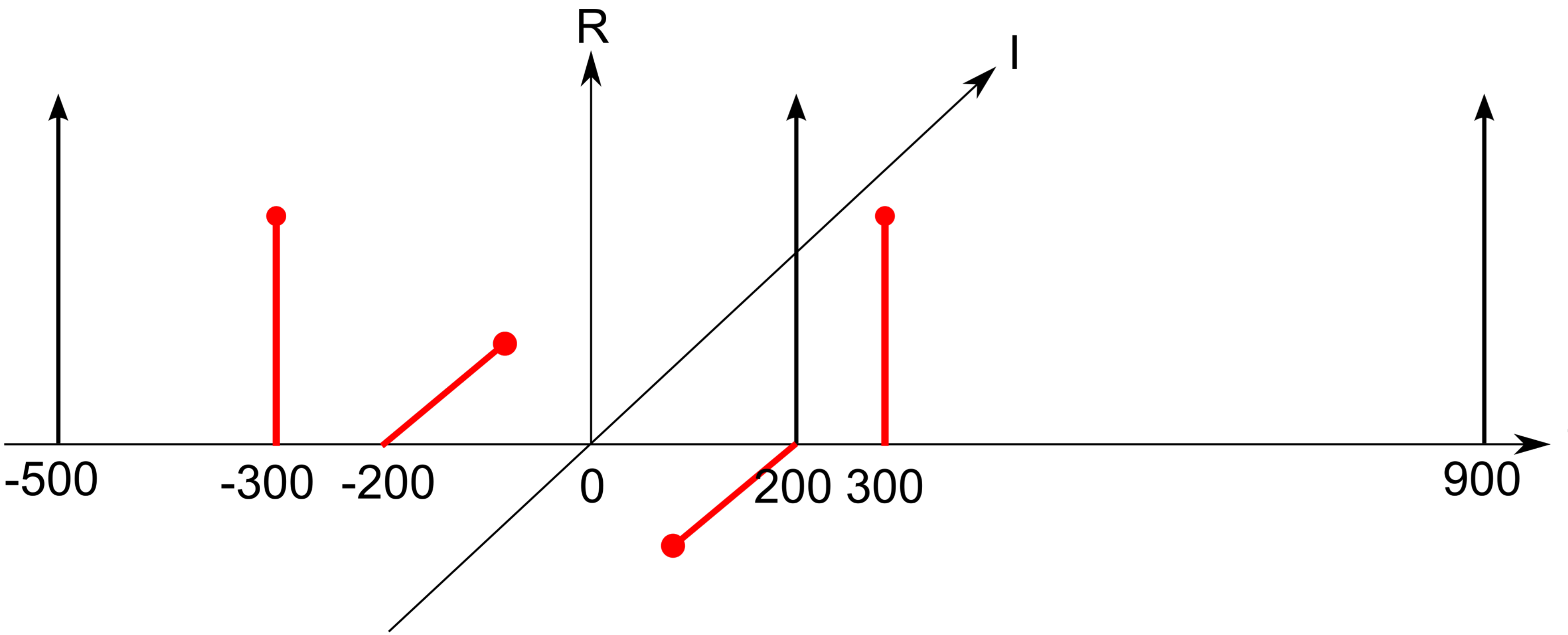
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 700 Hz

Verschiebung um 0 Hz



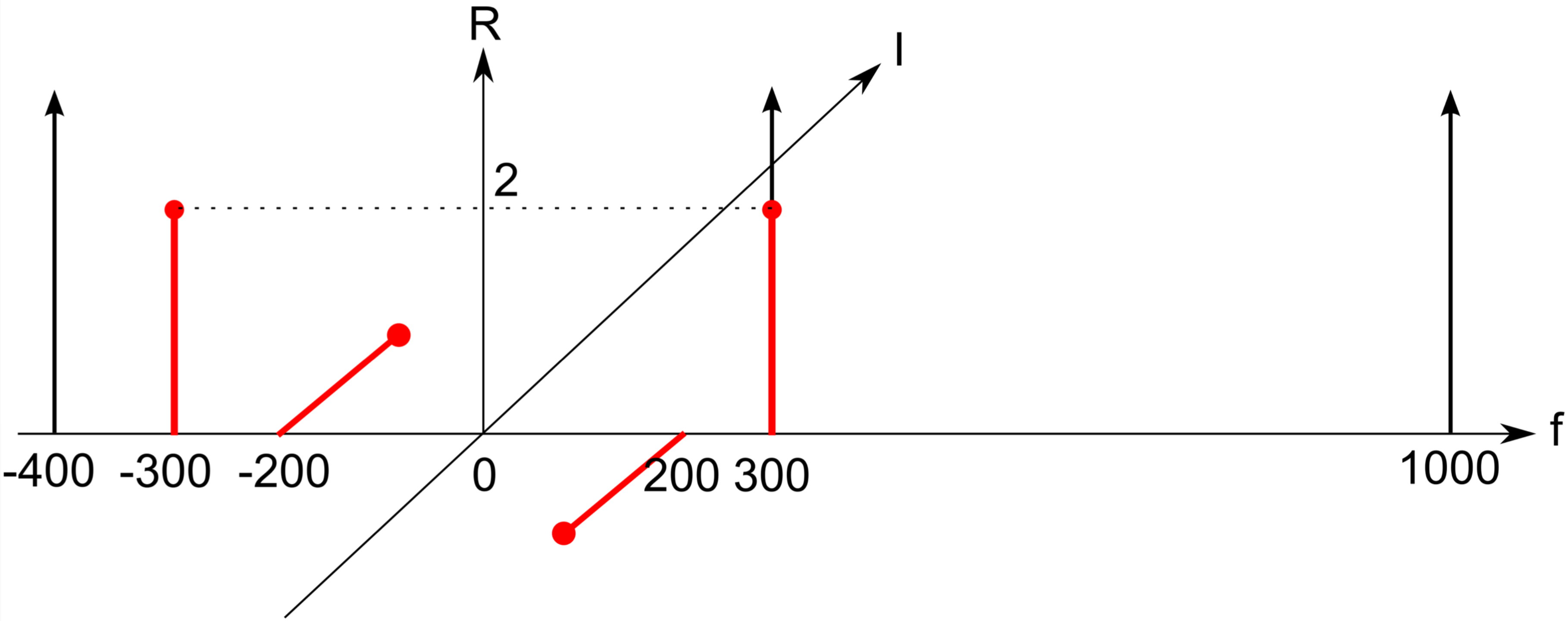
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 700 Hz

Verschiebung um 200 Hz



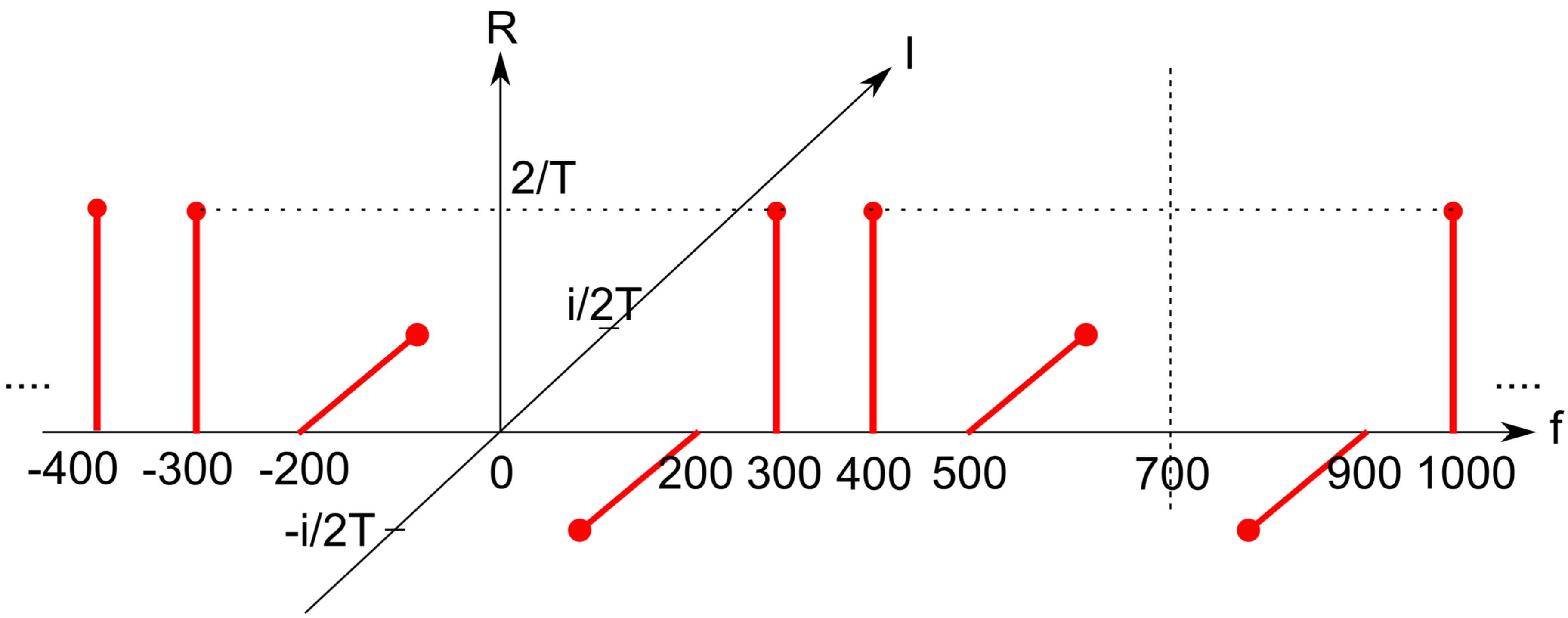
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 700 Hz

Verschiebung um 300 Hz



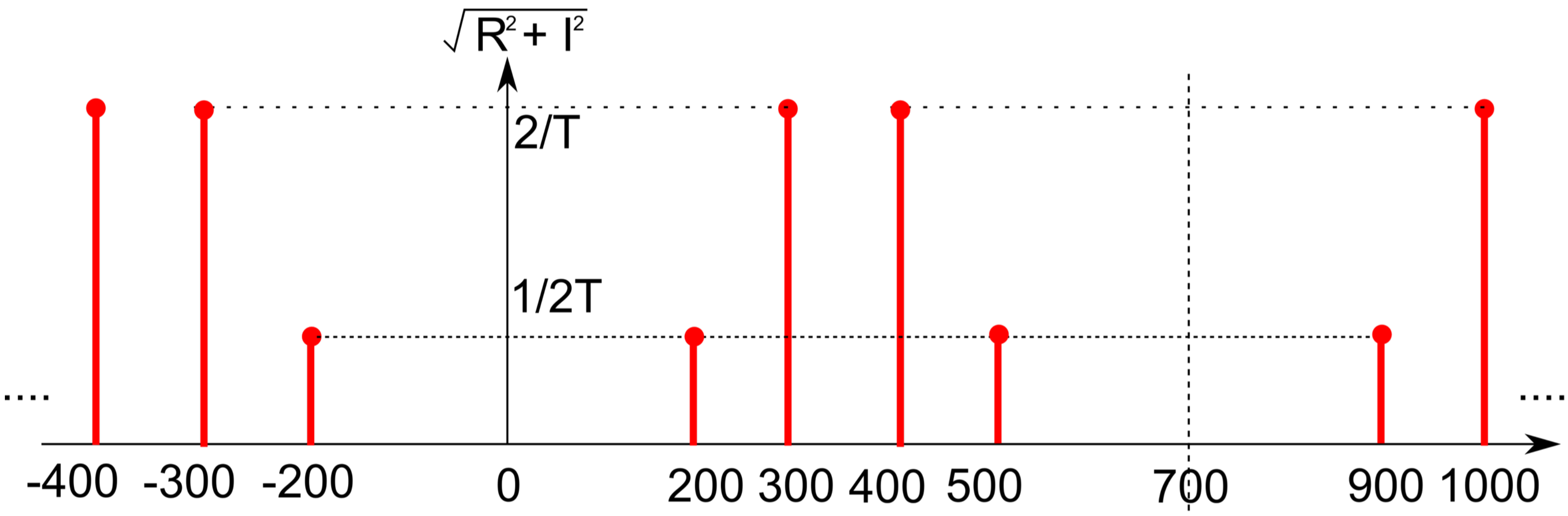
c) Abtastung mit 700 Hz

komplexes Spektrum nach der Abtastung



Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 700 Hz

Betragsspektrum nach der Abtastung



Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
Onlinefrage Nr. 2

Beim Rekonstruieren des Signals aus dem abgetasteten Spektrum aus Aufgabe 2a) entsteht ein Signal mit verfälschter Frequenz. Welche der folgenden Frequenzen sind verfälscht?

i) 0 Hz

ii) 100 Hz

iii) 200 Hz

iv) 300 Hz

Die korrekte Antwort ist iii) 200 Hz und iv) 300 Hz

Aufgabe 3: Filtern
a)

Die gegebene Funktion ist $v(t) = \pi \cdot \delta(t) - \frac{\sin(6\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)}{t}$

Hinweise:

$f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ entspricht $f(t) = \mathrm{sinc}(t)$

Fouriertransformierte von $g(t) = \mathrm{sinc}(at)$

$$G(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \text{ mit } \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Um welchen Filter handelt es sich?

Aufgabe 3: Filtern
a)

Umformen:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \pi\delta(t) - \frac{\sin(\omega_o t) - \sin(6\omega_o t)}{t} \\
&= \pi\delta(t) - \left(\frac{6\omega_o \sin(6\omega_o t)}{6\omega_o t} - \frac{3\omega_o \sin(3\omega_o t)}{3\omega_o t}\right) \\
&= \pi\delta(t) - \left(6\omega_o \frac{\sin(\pi\frac{6\omega_o}{\pi}t)}{\pi\frac{6\omega_o}{\pi}t} - 3\omega_o \frac{\sin(\pi\frac{3\omega_o}{\pi}t)}{\pi\frac{3\omega_o}{\pi}t}\right) \\
&= \pi\delta(t) - \left(6\omega_o \mathtt{sinc}\left(\frac{6\omega_o}{\pi}t\right) - 3\omega_o \mathtt{sinc}\left(\frac{3\omega_o}{\pi}t\right)\right)
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung von: $\mathtt{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Aufgabe 3: Filtern
a)

$$V(\omega) = F(v(t)) = F(\pi\delta(t) - (6\omega_o \mathtt{sinc}(\tfrac{6\omega_o}{\pi}t) - 3\omega_o \mathtt{sinc}(\tfrac{3\omega_o}{\pi}t)))$$

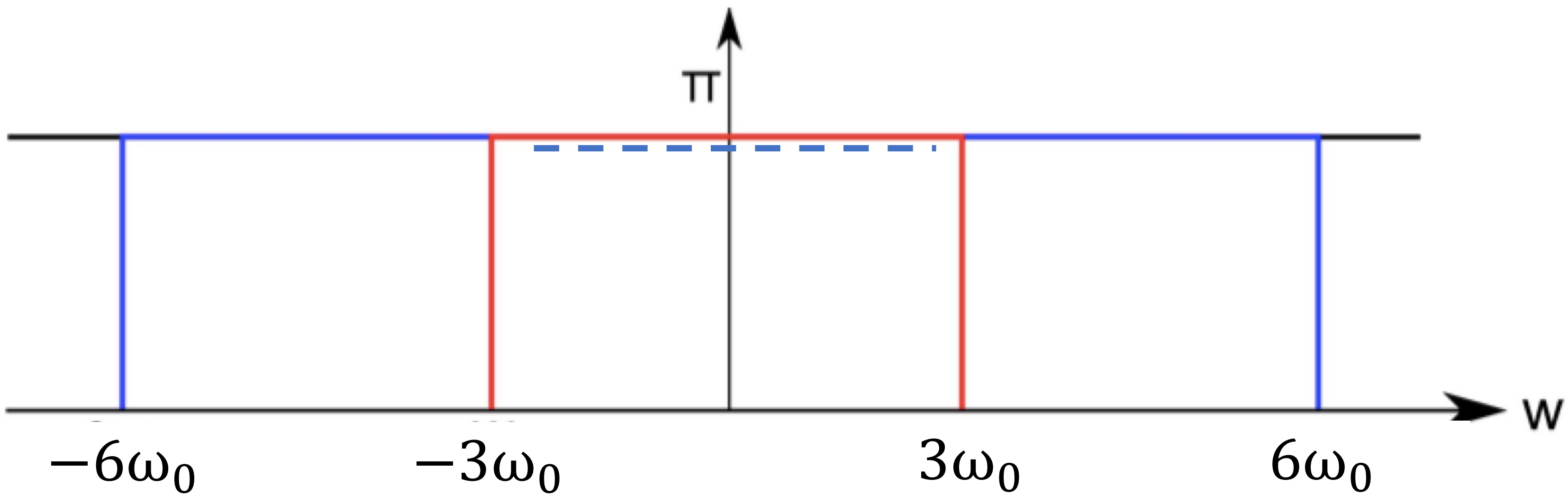
$$\begin{aligned}
V(\omega) &= \pi \cdot 1 - (6\omega_o \frac{1}{|\frac{6\omega_o}{\pi}|}\mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\pi\frac{6\omega_o}{\pi}}) - 3\omega_o \frac{1}{|\frac{3\omega_o}{\pi}|}\mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\pi\frac{3\omega_o}{\pi}})) \\
&= \pi - (6\omega_o \frac{\pi}{6\omega_o}\mathtt{rect}(\frac{\omega}{12\omega_o}) - 3\omega_o \frac{\pi}{3\omega_o}\mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o})) \\
&= \pi - (\pi\mathtt{rect}(\frac{\omega}{12\omega_o}) - \pi\mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o})) \\
&= \pi - \pi\mathtt{rect}(\frac{\omega}{12\omega_o}) + \pi\mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o})
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von:

$$g(t) = \mathrm{sinc}(at) \qquad G(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi a}) \text{ mit } \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Filtern
a)

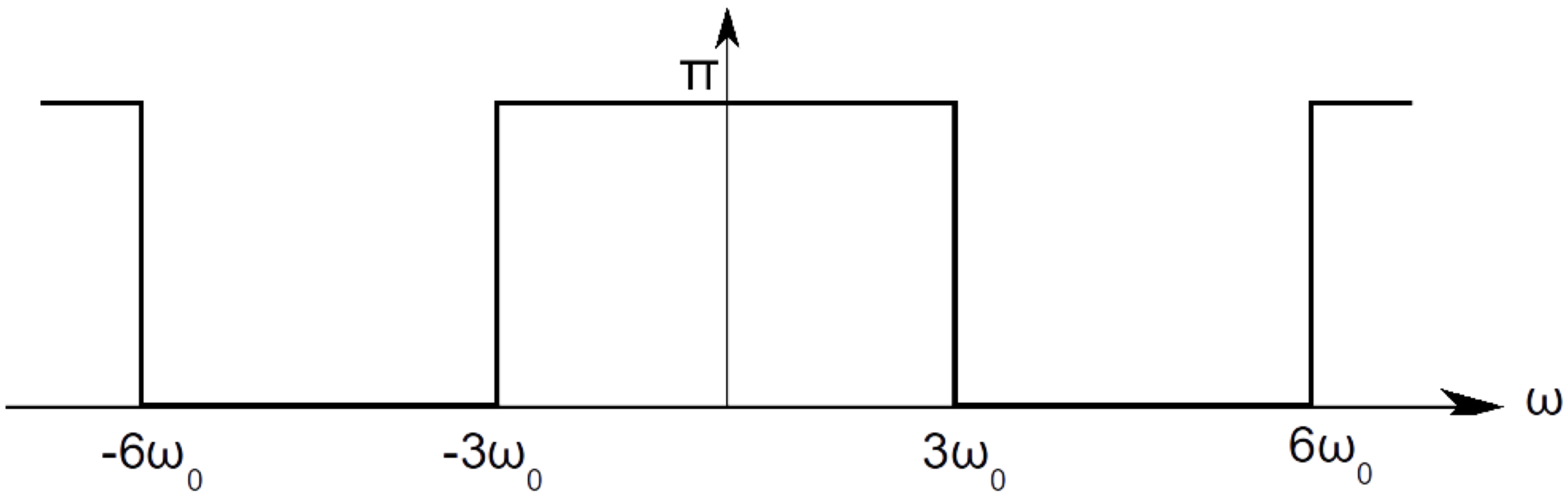
$$V(\omega) = \pi - \pi\, rect\left(\frac{\omega}{12\omega_0}\right) + \pi rect\left(\frac{\omega}{6\omega_0}\right)$$



$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Filtern
Onlinefrage Nr. 3

Um welchen Filter handelt es sich? Bandsperre (Antwort ii)



Aufgabe 4: Diskrete Fouriertransformation, Sampling a)

Samplingrate	Grenzfrequenz	Frequenzauflösung	Zeitauflösung
1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0,1 s
100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
10 Hz	5 Hz	0,1 Hz	10 s

bei 100 Samples

Anzahl N Samples benötigt, um bei einer Abtastfrequenz von 48 kHz eine Frequenzauflösung von 5 Hz zu ermöglichen?

Grenzfrequenz 24 kHz und Frequenzauflösung 5 Hz ➔ 4800 informationstragende Werte nötig

➔ 9600 Samples sind benötigt

Aufgabe 4: Diskrete Fouriertransformation, Sampling
Onlinefrage Nr. 4

Samplingrate	Grenzfrequenz	Frequenzauflösung	Zeitauflösung
1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0,1 s
100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
10 Hz	5 Hz	0,1 Hz	10 s

bei 100 Samples

Welche zeitliche Auflösung wird benötigt, damit eine DFT eine Frequenzauflösung von 5 Hz erreichen kann, wenn ein Signal mit 48 kHz abgetastet wurde?

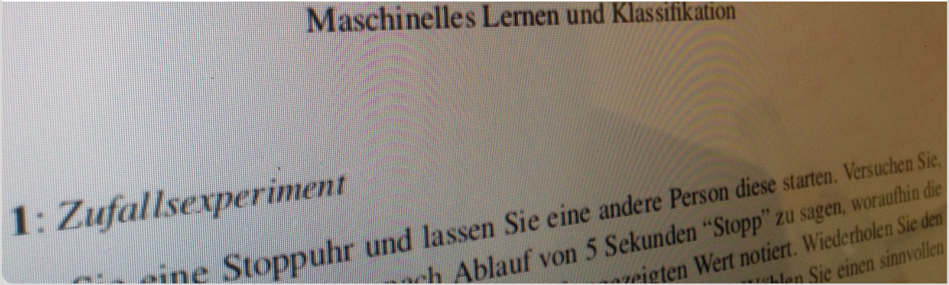
Aus Teilaufgabe a) wissen wir, dass wir 9600 Samples benötigen. Bei einer Abtastrate 48 kHz entspricht dies einer zeitlichen Auflösung von $\frac{1}{5}$ s.

Karlsruher Institut für Technologie

Kognitive Systeme – Übung 2

29.05.2019 – Maschinelles Lernen und Klassifikation

Institut für Anthropomatik und Robotik – Interactive Systems Lab



Übersicht

Karlsruher Institut für Technologie

- Aufgabe 1: Zufallsexperiment
- Aufgabe 2: Fehlerwahrscheinlichkeit
- Aufgabe 3: k-Nearest Neighbours
- Aufgabe 4: Perzeptronen
- Aufgabe 5: Neuronale Netze

Aufgabe 1 a)

Nehmen Sie eine Stoppuhr und lassen Sie eine andere Person diese starten. Versuchen Sie, ohne die Stoppuhr zu sehen, nach Ablauf von 5 Sekunden “Stopp” zu sagen, woraufhin die andere Person die Uhr stoppt und den darauf angezeigten Wert notiert. Wiederholen Sie den Versuch *n* mal, ohne die bereits notierten Werte zu betrachten. Wählen Sie einen sinnvollen Wert für *n*, um einen Naiven Bayes-Klassifikator zu trainieren.

Produzieren sie also Zufallszahlen:

Zum Beispiel diese:

2,5	5,2	4,5	6,1
1,6	3,6	3,5	7,0
	2,7	6,3	

Your mileage may vary

Aufgabe 1 b)

Karlsruher Institut für Technologie

Nehmen Sie an, das Experiment in Teilaufgabe a) unterliegt einem Zufallsprozess, der mit einer Gauß'schen Normalverteilung beschrieben werden kann. Somit lässt sich für jede Person, die den beschriebenen Versuch durchführt, eine spezifische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschreiben. Schätzen Sie die Parameter Ihrer persönlichen Verteilung mit den gemessenen Ergebnissen mit der *Maximum Likelihood*-Methode.

Maximum Likelihood:
Die Verteilung, die am Wahrscheinlichsten diese Daten produziert hat.

Aufgabe 1 b)

Die Gauß- (oder Normal-)Verteilung ist wie folgt definiert:

$$P(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ ist der Erwartungswert, σ die Standardabweichung, σ^2 die Varianz.
Die Wahrscheinlichkeit, die Folge $x_1; ...; x_n$ zu produzieren
(*Likelihood-Funktion*), ist

$$\begin{aligned} L(\mu;\sigma^2;x_1;...;x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 1 b)

Likelihood:

$$L(\mu;\sigma^2;x_1;...;x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Maximieren der Likelihood ist äquivalent zum Maximieren der Log-likelihood:

$$l(\mu;\sigma^2;x_1;...;x_n) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Für das Maximum resp. $\mu;\sigma^2$ muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l(\mu;\sigma^2;x_1;...;x_n) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} l(\mu;\sigma^2;x_1;...;x_n) = 0$$

Aufgabe 1b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\mu} l(\mu; \sigma^2; x_1; ...; x_n) \\
=&\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \\
=&\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\
=&\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \\
\implies &\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \qquad \text{Da } \frac{\partial}{\partial\mu} = 0 \\
\implies &\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 b)

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} l(\mu;\sigma^2;x_1;\ldots;x_n)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-n\right)$$

Aufgabe 1 b)

$$0 = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n = 0$$

$$n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \qquad \text{Falls } \sigma^2 \neq 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Aufgabe 1 b)

Die Maximum-Likelihood-Schätzungen für μ und σ^2 sind also:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2$$

Der Beweis ist natürlich weder in der Aufgabe noch in der Klausur gefragt...

Aufgabe 1 b)

Karlsruher Institut für Technologie

Und für unsere Zufallswerte:

$$\texttt{rand} = \begin{matrix} 2{,}5 & 5{,}2 & 4{,}5 & 6{,}1 \\ 1{,}6 & 3{,}6 & 3{,}5 & 7{,}0 \\ & 2{,}7 & 6{,}3 & \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \texttt{rand.sum()}\,/\,n = 4{,}3 \\ \hat{\sigma}^2 &= ((\texttt{rand} - \hat{\mu})^2)\texttt{.sum()}\,/\,n = 3{,}0 \\ \hat{\sigma} &\approx 1{,}7 \end{aligned}$$

Aufgabe 1 c)

Die in Teilaufgabe b) beschriebene Verteilungsfunktion soll die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Klasse ω_1 beschreiben. Nehmen Sie an, eine Kommilitonin hat einen ähnlichen Versuch durchgeführt. Aus ihren Messungen ergibt sich eine Klasse ω_2, die ebenfalls einer Normalverteilung unterliegt mit dem Erwartungswert $\mu_2 = 5{,}1$ und der Varianz $\sigma_2^2 = 0{,}6$. Führen Sie einen einzelnen weiteren Versuch wie beim Zufallsexperiment in Teilaufgabe a) durch und versuchen Sie, mit einem Naiven Bayes-Klassifikator zu ermitteln, ob das Ergebnis zu Ihnen selbst oder Ihrer Kommilitonin passt (ω_1 oder ω_2). Sie haben dabei die Handschrift analysiert, mit der das Ergebnis notiert wurde; Sie vermuten deshalb von vornherein, dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 zu ω_1 gehört und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 zu ω_2.

$$
\begin{aligned}
P(x|\omega_1) &\sim N(4{,}3; 3{,}0) \\
P(x|\omega_2) &\sim N(5{,}1; 0{,}6) \\
P(\omega_1) &= 0{,}4 \\
P(\omega_2) &= 0{,}6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 c)

Ein *Naiver Bayes-Klassifikator* wählt für einen Zufallswert x die Klasse ω_c mit der höchsten *a posteriori Wahrscheinlichkeit* $P(\omega_c|x)$
A posteriori Wahrscheinlichkeit nach Bayes:

$$P(\omega_c|x) = \frac{P(x|\omega_c)P(\omega_c)}{P(x)}$$

Aufgabe 1 c)

$x = 4{,}8$
$P(x)$ ist für beide Klassen gleich, wird nicht benötigt

$$P(\omega_1|x) = \frac{P(x|\omega_1)P(\omega_1)}{P(x)}$$

$$P(x|\omega_1)P(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(4{,}8-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} P(\omega_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi 3{,}0}} e^{-\frac{(4{,}8-4{,}3)^2}{2\cdot 3{,}0}} \cdot 0{,}4$$

$$\approx 0{,}23 \cdot e^{-0{,}04} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}09$$

$$P(\omega_2|x) = \frac{P(x|\omega_2)P(\omega_2)}{P(x)}$$

$$P(x|\omega_2)P(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(4{,}8-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} P(\omega_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi 0{,}6}} e^{-\frac{(4{,}8-5{,}1)^2}{2\cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}6$$

$$\approx 0{,}44 \cdot e^{-0{,}06} \cdot 0{,}6 \approx 0{,}25$$

Aufgabe 2

Wie hoch ist die Fehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit eines Schwellwerts θ, wenn sich eine Entscheidungsfunktion für ω_1 entscheidet wenn $x < \theta$ und ansonsten für ω_2?

Demonstration in GeoGebra

Aufgabe 2 a)

Formaler:

$$
\begin{aligned}
P_{Fehler}(\theta) =& P(\omega_1) \int_{\theta}^{\infty} P(x|\omega_1) dx + P(\omega_2) \int_{-\infty}^{\theta} P(x|\omega_2) dx \\
=& 0{,}2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 0{,}8 \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 b)

Wie lautet der optimale Schwellwert θ_{opt}?

Der ideale Schwellwert liegt am Schnittpunkt der beiden Verteilungen.
Beweis:

$$P_{Fehler}(\theta) = P(\omega_1)\int_{\theta}^{\infty} P(x|\omega_1)dx + P(\omega_2)\int_{-\infty}^{\theta} P(x|\omega_2)dx$$

$$\frac{d}{d\theta}P_{Fehler}(\theta) = -P(\omega_1)P(\theta|\omega_1) + P(\omega_2)P(\theta|\omega_2) = 0$$

$$\Longrightarrow P(\omega_1)P(\theta|\omega_1) = P(\omega_2)P(\theta|\omega_2)$$

Aufgabe 2 b)

Schnittpunkt bestimmen:

$$
\begin{aligned}
P(\omega_1)P(x|\omega_1) &\stackrel{!}{=} P(\omega_2)P(x|\omega_2)\\
\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{{\theta_{opt}}^2}{2}} &= \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\theta_{opt}-2)^2}{2}}\\
1e^{-\frac{{\theta_{opt}}^2}{2}} &= 4e^{-\frac{(\theta_{opt}-2)^2}{2}}\\
\frac{1}{4} &= e^{\frac{{\theta_{opt}}^2-(\theta_{opt}-2)^2}{2}}\\
0{,}25 &= e^{2\theta_{opt}-2}\\
\ln(0{,}25) &= 2\theta_{opt}-2\\
\theta_{opt} &= \frac{2+\ln(0{,}25)}{2} \approx 0{,}307
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 c)

Berechnen Sie den kleinsten möglichen Klassifikationsfehler.

Der kleinstmögliche Klassifikationsfehler wird erreicht, wenn der Schwellwert θ den optimalen Wert hat. Wir berechnen also $P_{fehler}(\theta_{opt})$.

Die Standardnormalverteilung ist: $\Phi_{0;1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

Aufgabe 2 c)

$$
\begin{aligned}
P_{fehler}(\theta) &= \int_{\theta}^{\infty} P(x|\omega_1)P(\omega_1)dx + \int_{-\infty}^{\theta} P(x|\omega_2)P(\omega_2)dx \\
&= \frac{1}{5}\int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{4}{5}\int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{5}\int_{0,3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{4}{5}\int_{-\infty}^{0,3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0,3}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0,3-2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0,3} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right) + \frac{4}{5}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1,7} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right) \\
&= \frac{1}{5}\cdot(1-\Phi(0,3)) + \frac{4}{5}\cdot(1-\Phi(1,7)) \\
&\approx \frac{1}{5}\cdot(1-0.62) + \frac{4}{5}\cdot(1-0,96) \\
&= \frac{1}{5}\cdot 0,38 + \frac{4}{5}\cdot 0,04 \\
&\approx 0.11
\end{aligned}
$$

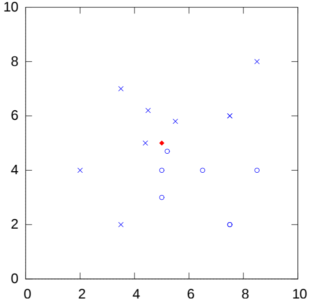
Aufgabe 2 d)

Sie haben eine Reihe von Messungen durchgeführt und die Messdaten mit einem Naiven Bayes-Klassifikator, bei dem Sie den Schwellwert auf das zuvor errechnete θ_{opt} gesetzt haben, klassifiziert. Sie stellen dabei fest, dass die tatsächliche Fehlerrate höher liegt als die in Teilaufgabe c) errechnete Fehlerwahrscheinlichkeit. Warum ist dies so?

- Die Parameter der Verteilungen waren auch nur Schätzungen.
- Mehr Daten können zu besseren Schätzungen führen
- Daten müssen garnicht Normalverteilt sein
- In Aufgabe 1 b) haben wir $P(x) \sim N(4{,}3; 3{,}0)$ geschätzt. Ich habe die Daten aber aus $N(4{,}7; 1{,}7)$ gezogen.

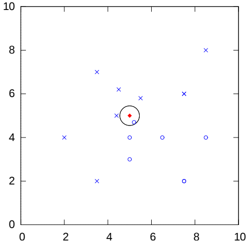
Aufgabe 3

Gegeben sei der folgende Datensatz mit zwei Klassen (Kreise und Kreuze). Klassifizieren Sie das mit einer Raute markierte Merkmal an den Koordinaten (5, 5) mit dem *k-Nearest-Neighbors* Algorithmus für $k = 1$ und $k = 5$. Benutzen Sie dabei zur Gewichtung die euklidische Distanz.

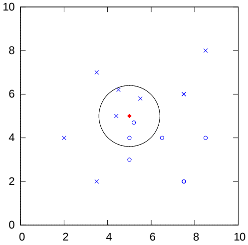


Aufgabe 3

$k = 1$

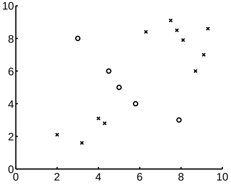


$k = 5$

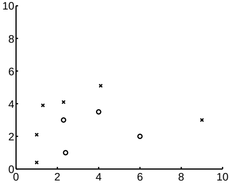


Aufgabe 4

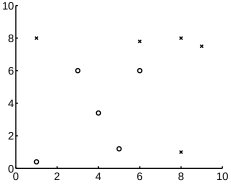
In den Grafiken (a) bis (d) sind jeweils Datenpunkte zweier Klassen eingezeichnet.



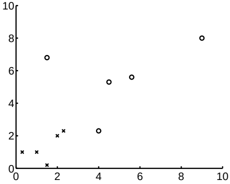
a)



b)

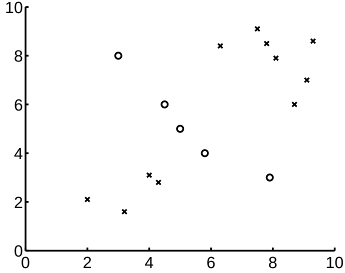


c)



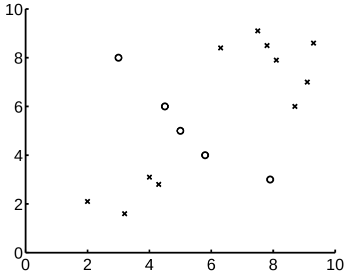
d)

Aufgabe 4



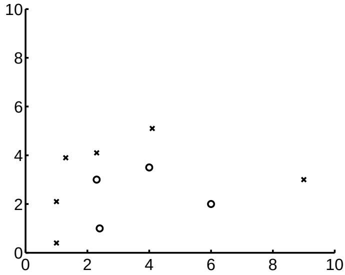
Die beiden Klassen sind linear separierbar.

Aufgabe 4



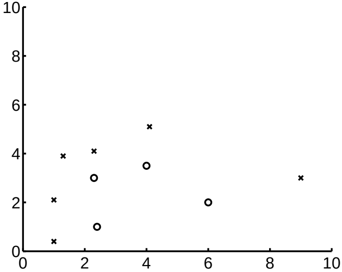
Die beiden Klassen sind linear separierbar.
Falsch

Aufgabe 4



Die beiden Klassen lassen sich mit einem *Multi Layer Perceptron* mit einer versteckten Schicht, die aus zwei Neuronen besteht, trennen.

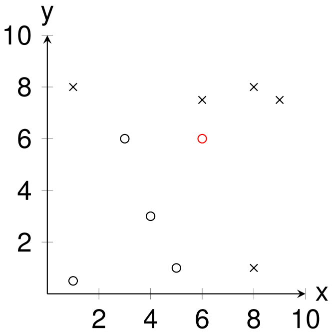
Aufgabe 4



Die beiden Klassen lassen sich mit einem *Multi Layer Perceptron* mit einer versteckten Schicht, die aus zwei Neuronen besteht, trennen.

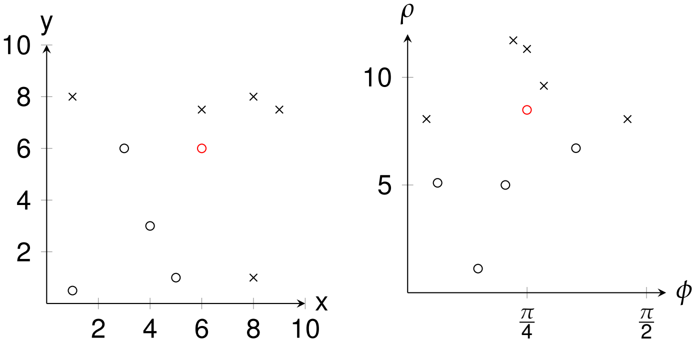
Richtig (Demo)

Aufgabe 4



Nach einer Umrechnung in Polarkoordinaten (ohne Verschiebung) sind die beiden Klassen linear separierbar.

Aufgabe 4



Nach einer Umrechnung in Polarkoordinaten (ohne Verschiebung) sind die beiden Klassen linear separierbar.

Falsch

Aufgabe 5

Berechnen Sie ein einfaches Perzeptron mit binärer Schwellwertfunktion, das die Klassen A und B trennt.

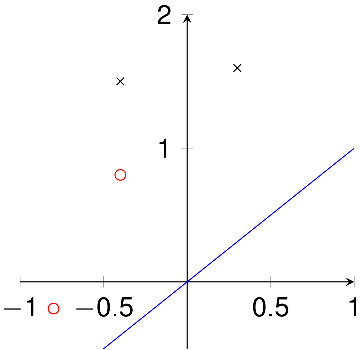
Perzeptron:

$$g(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + b$$

Falls $g(x) > 0$, wird x der positiven Klasse (A) zugeordnet, ansonsten der negativen. Die Trenngerade verläuft also bei $g(x) = 0$.
Berechnung der Trenngeraden:

$$\begin{aligned} w_1 x_1 + w_2 x_2 + b &= 0 \\ w_2 x_2 &= -w_1 x_1 - b \\ x_2 &= -\frac{w_1}{w_2} x_1 - \frac{1}{w_2} b \end{aligned}$$

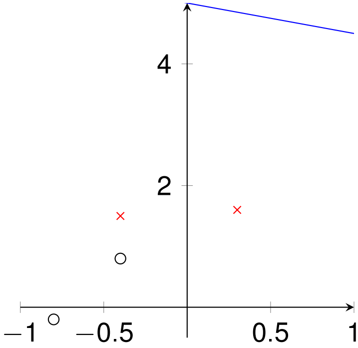
Aufgabe 5 – Iteration 1



$$\vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; b_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$-(-1) \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 – Iteration 2

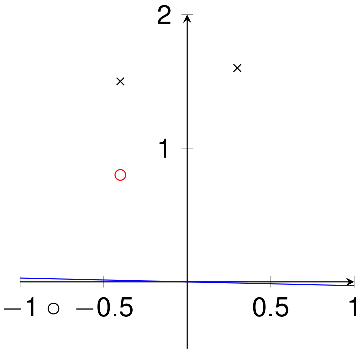


$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}; b_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \\ 2 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-(1) \begin{pmatrix} -0.4 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -3.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

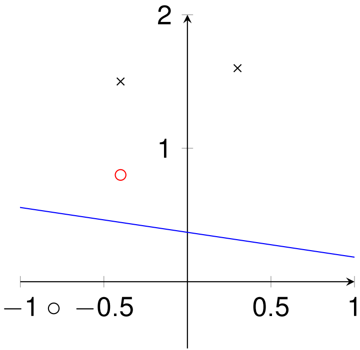
Aufgabe 5 – Iteration 3



$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -3.5 \end{pmatrix};\; b_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

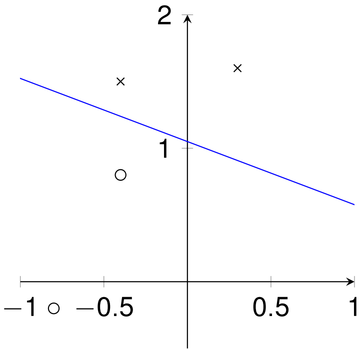
Aufgabe 5 – Iteration 4



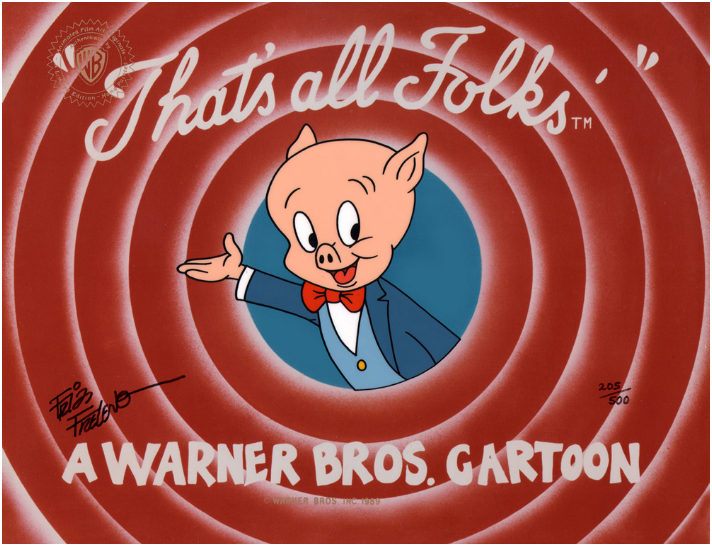
$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.7 \end{pmatrix};\ b_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ -1.9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 – Ende



Alles korrekt klassifiziert. Letzte Parameter:
$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} -0.9 \\ -1.9 \end{pmatrix}$; $b_4 = 2$


"That's all Folks!"
TM
205
500
A WARNER BROS. CARTOON
© WARNER BROS. INC 1989

Karlsruher Institut für Technologie

Kognitive Systeme – Übung 3

12. Juni 2019 – Maschinelles Lernen und Spracherkennung

Stefan Constantin, Felix Schneider

KIT, Institute for Anthropomatics and Robotics, Department of Informatics, Interactive Systems Laboratories

Aufgabe 1: Neuronales Netz: XOR-Problem

a) XOR-Problem

Aufgabe: Entwickeln Sie ein neuronales Netz mit der Sigmoidfunktion als Aktivierungsfunktion, welches das XOR-Problem mit folgendem Aufbau löst:

1 versteckte Schicht

2 binäre Eingänge (0/1)

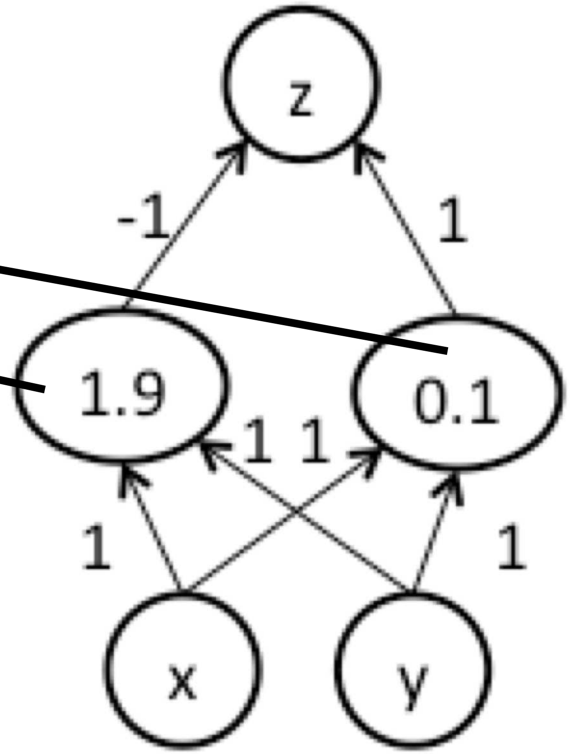
1 binärer Ausgang (0/1)

Eingang 1	Eingang 2	Ausgang
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

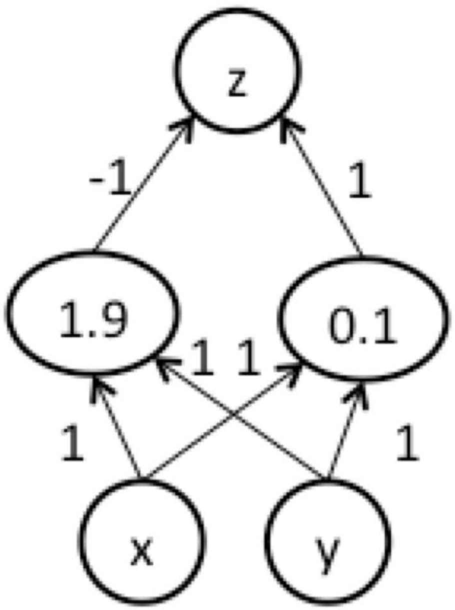
Aufgabe 1: Neuronales Netz: XOR-Problem
a) XOR-Problem

Mögliche Lösung z.B.:

Schwellwert, ab dem
1 ausgegeben wird,
ansonsten 0



Online-Frage Nr. 1



Wie viele versteckte Neuronen sind mind. nötig (direkte Verbindungen sind nicht erlaubt?)

Antwort: 2

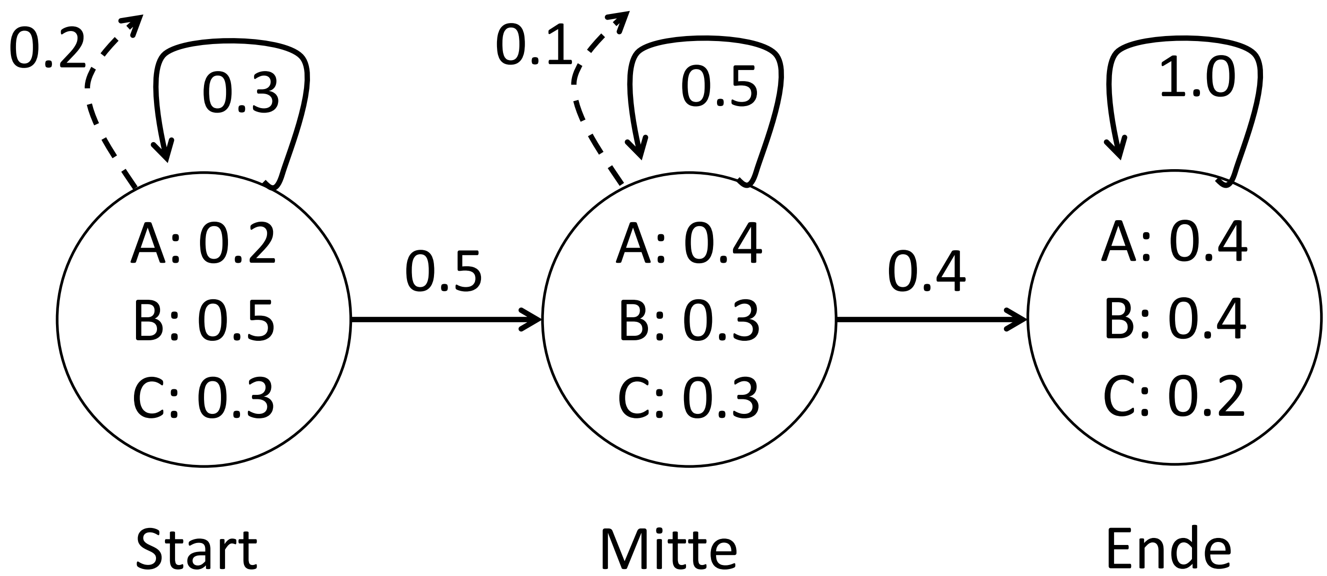
Aufgabe 2: Neuronales Netz: Autoencoder

- Autoencoder ist ein künstliches neuronales Netz
- Es kann ein single-layer or multilayer Perzeptron sein
- Trainiert, um die Rekonstruktionsfehler zu minimieren
- Lernt eine Repräsentation (Encoding) für eine Menge an Daten, z.B. Dimensionalitätsreduktion
- Verwendet die Eingabe als Zielausgabe und benötigt keine zusätzlichen Labels: *unüberwachtes Lernen*

- Ein parametrisches Modell setzt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung voraus. Dies ist für neuronale Netzwerke nicht der Fall: *nicht-parametrisch*

Aufgabe 3: HMM – Forward-/Viterbi-Algorithmus
a) Wahrscheinlichkeit

unvollständiges HMM:



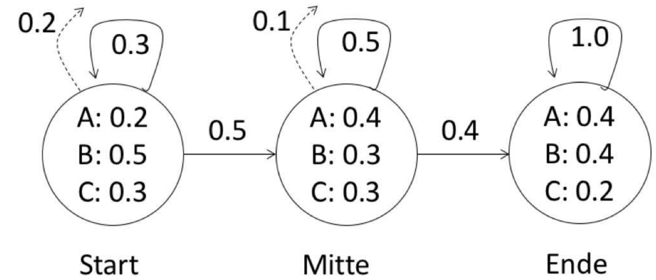
Pro Zustand:

Emissionswahrscheinlichkeiten summieren sich auf zu 1

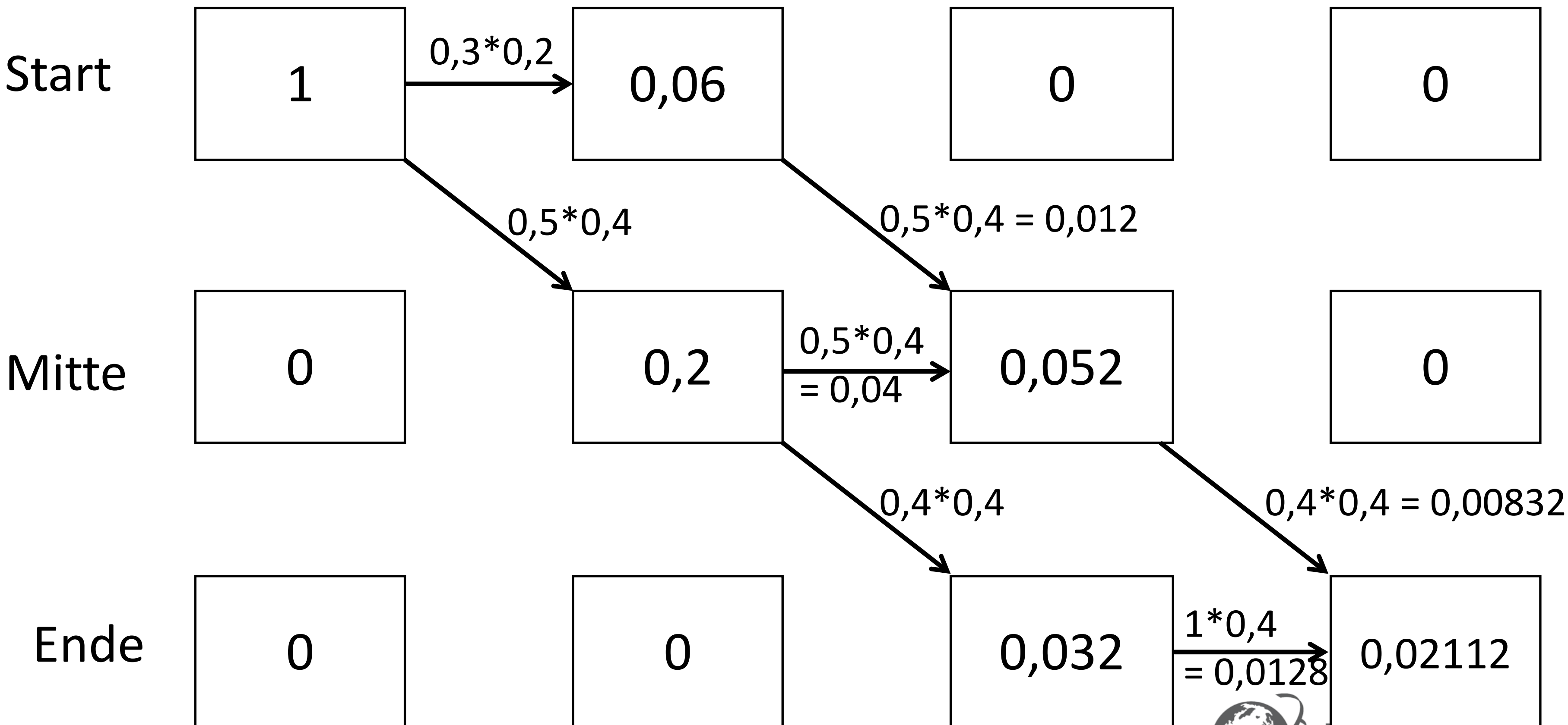
Übergangswahrscheinlichkeiten summieren sich auf zu 1 (vollständiges HMM)

Aufgabe 3: HMM – Forward-/Viterbi-Algorithmus

a) Wahrscheinlichkeit

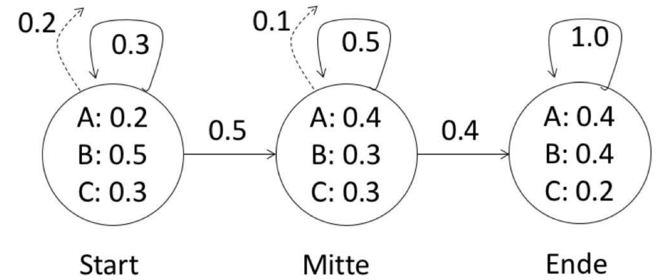


Wahrscheinlichkeit für $O_1 = \mathrm{AAB}$

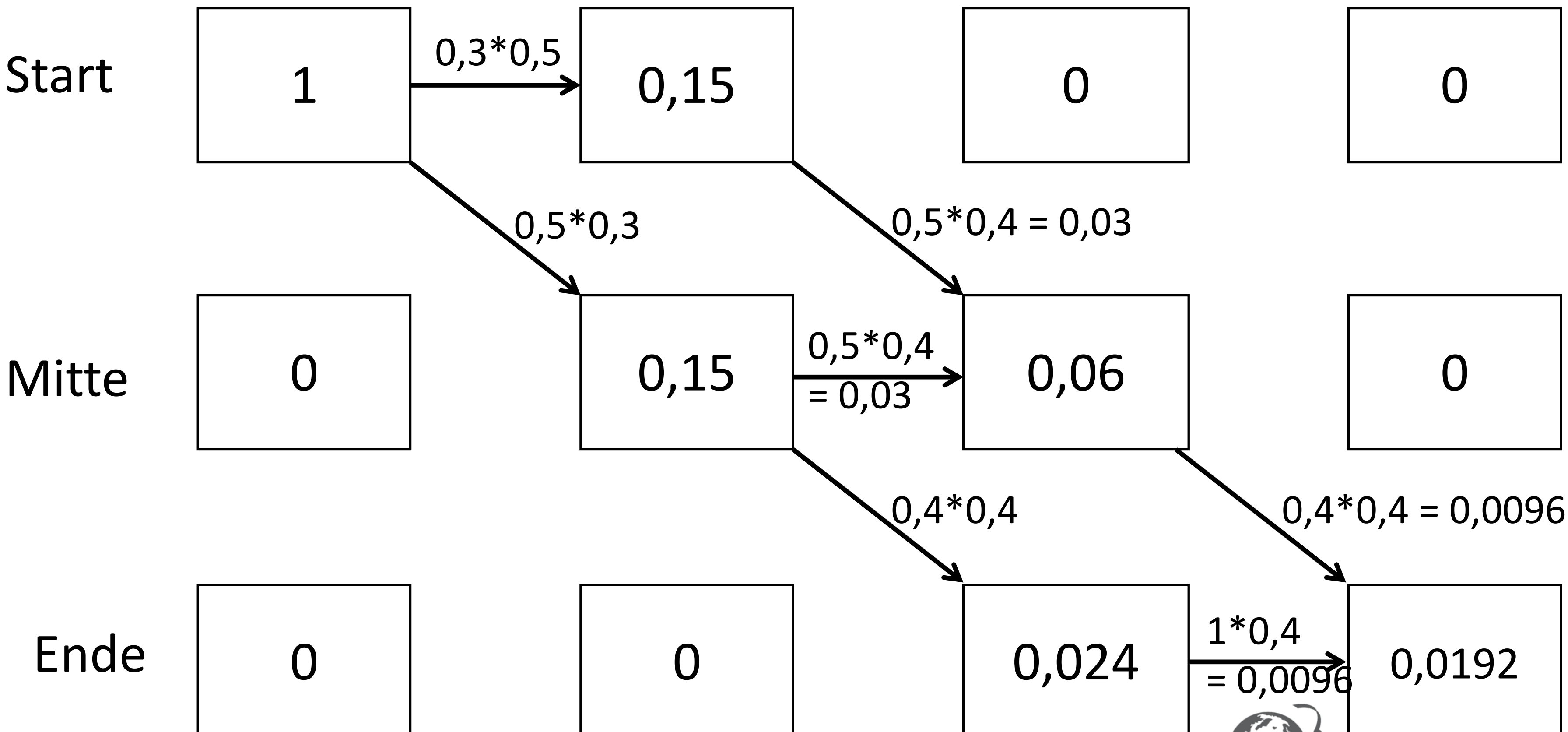


Aufgabe 3: HMM – Forward-/Viterbi-Algorithmus

a) Wahrscheinlichkeit



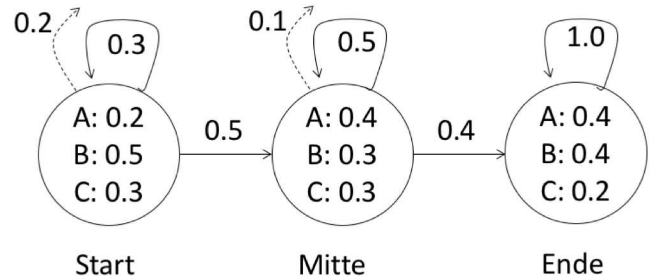
Wahrscheinlichkeit für $O_2 = \mathrm{BAB}$

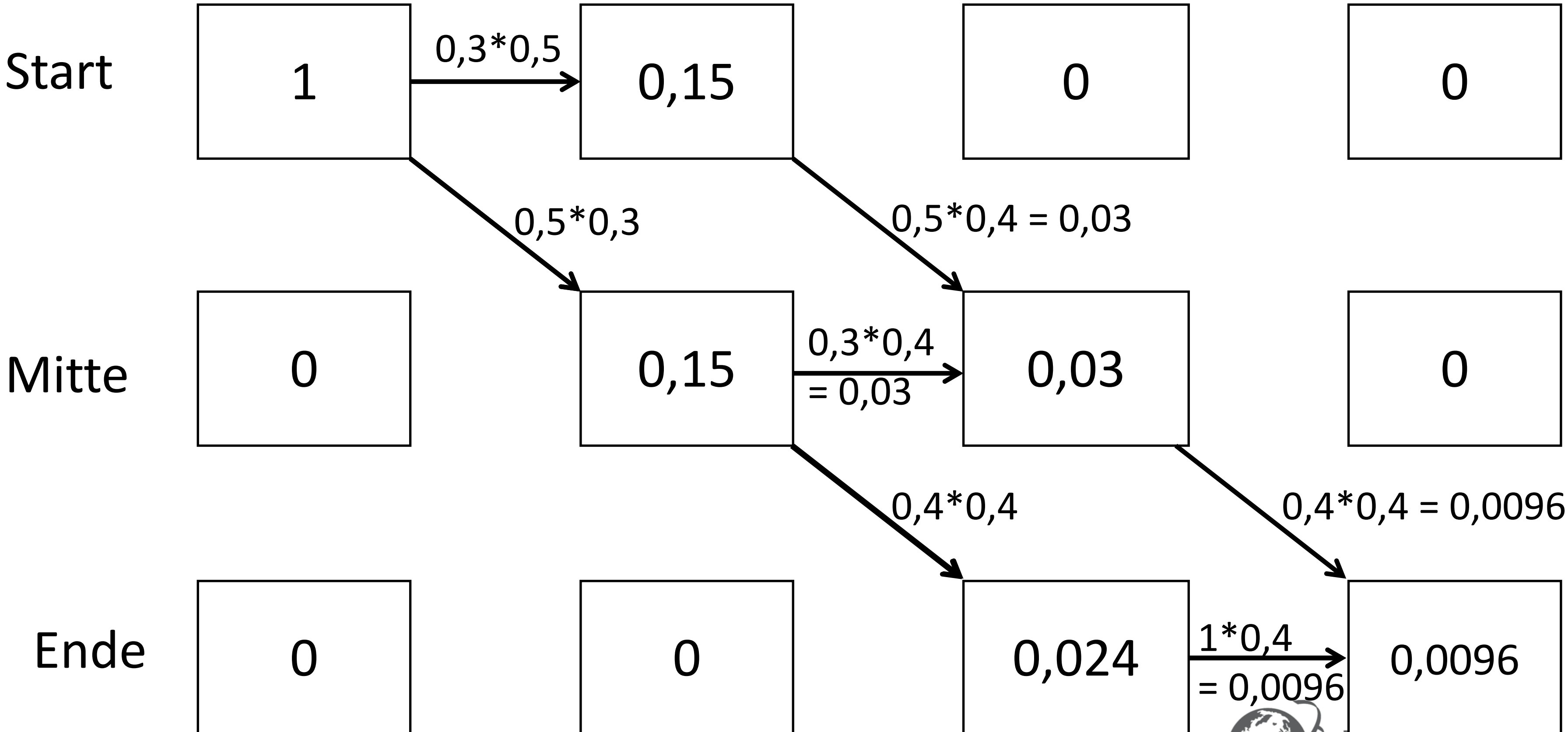


Aufgabe 3: HMM – Forward-/Viterbi-Algorithmus

b) Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit für $O_2 = \mathrm{BAB}$

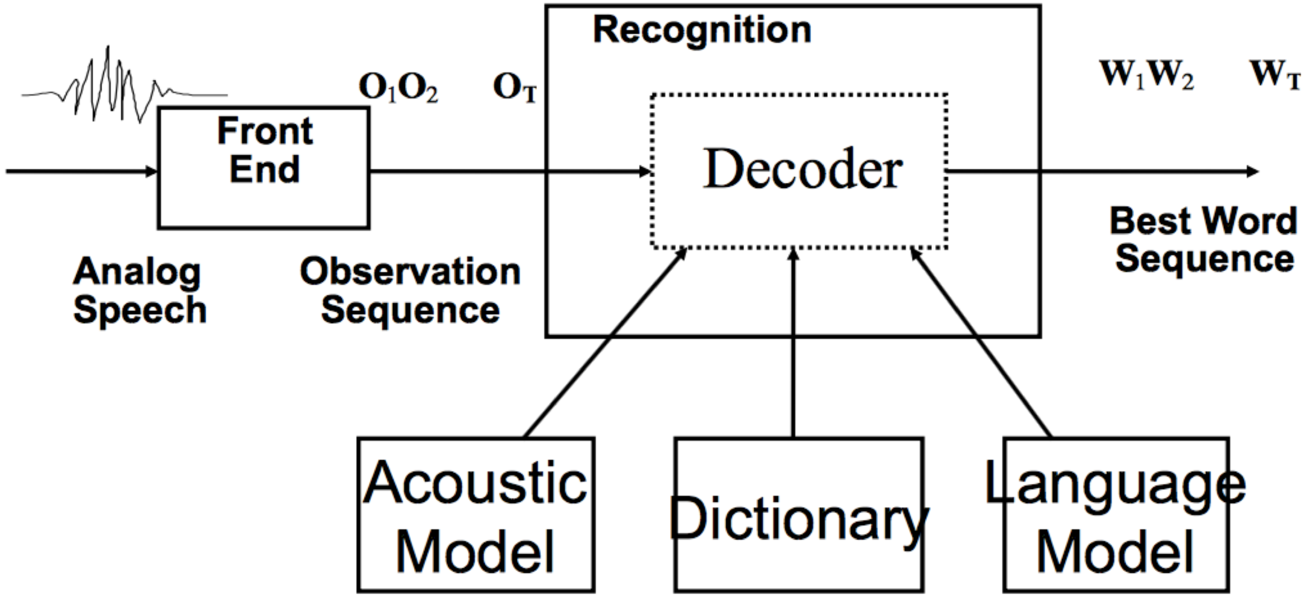




Aufgabe 3: HMM – Forward-/Viterbi-Algorithmus
c) *Onlinefrage Nr. 2:* Wahrscheinlichste Folge?

$$P(O_{2,}Q \mid \lambda) = 0{,}0192 \quad < \quad P(O_{1,}Q \mid \lambda) = 0{,}02112 \rightarrow \quad O_1$$

Aufgabe 4: Sprachmodelle
Allgemein



Laut Sprachmodell:

P("I go there") > P("I go their")

Aufgabe 4: Sprachmodelle
Allgemein

$V = \{Karlsruher, Institut, für, Technologie\}$

w_{i-2}	w_{i-1}	$w_i = Karlsruher$	$w_i = Institut$	$w_i = für$	$w_i = Technologie$	$w_i = </S>$
n/a	<S>	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05
<S>	Karlsruher	0	0,8	0,05	0,05	0,1
<S>	Institut	1	0	0	0	0
<S>	für	0	0,9	0	0	0,1
<S>	Technologie	0	0,7	0,2	0	0,1
Karlsruher	Karlsruher	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Karlsruher	Institut	0	0	0,5	0,5	0
Karlsruher	für	0	0,6	0,2	0,1	0,1
Karlsruher	Technologie	0	0,4	0,4	0,1	0,1
Institut	Karlsruher	0	0	0,4	0,4	0,2
Institut	Institut	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Institut	für	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6
Institut	Technologie	0,05	0,05	0,6	0,1	0,2
für	Karlsruher	0,1	0,6	0,1	0,1	0,1
für	Institut	0,3	0	0,1	0,2	0,4
für	für	0	0	0	0	0
für	Technologie	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Technologie	Karlsruher	0	0,4	0,1	0,1	0,4
Technologie	Institut	0,4	0	0	0	0,6
Technologie	für	0,1	0,4	0	0	0,5
Technologie	Technologie	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

3-gram-LM (<S>: Satzanfang, </S>: Satzende)

Aufgabe 4: Sprachmodelle
Allgemein

Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit 3-Grammen:

$$\hat{P}(W) = P(w_1, w_2, ..., w_n) = \prod_{i=1}^{n} P(w_i | w_{i-2} w_{i-1})$$

Aufgabe 4: Sprachmodelle
Allgemein

Karlsruher Institut für Technologie

$$PP(W) = 2^{\hat{H}(W)} \text{ mit } \hat{H}(W) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})$$

Umformung:

$$PP(W) = 2^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})} \quad | \; a(b+c) = ab + ac$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})} \quad | \; p \; log_a(u) = log_a(u^p)$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}} \quad | log_a(u) + log_a(v) = log_a(uv)$$

$$= 2^{log_2 \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}} \quad | \; a^{log_a(u)} = u$$

$$| \; a^p + b^p = (ab)^p$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})\right)^{-\frac{1}{n}}$$

interACT

Aufgabe 4: Sprachmodelle
a) „Karlsruher Institut für Technologie“

Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von 3-grammen:

$$\hat{P}(W) = P(w_1, w_2, ..., w_n) = \prod_{i=1}^{n} P(w_i | w_{i-2} w_{i-1})$$

P(<S> Karlsruher Institut für Technologie </S>)

= 0,5 * 0,8 * 0,5 * 0,1 *0,2 = 0,004

Aufgabe 4: Sprachmodelle

a) „Karlsruher Institut für Technologie “

$$PP(W) = 2^{\hat{H}(W)} \text{ mit } \hat{H}(W) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})$$

Umformung:

$$\begin{aligned} PP(W) &= 2^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})} \\ &= 2^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})} \\ &= 2^{\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}} \\ &= 2^{log_2 \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

PP(<S> Karlsruher Institut für Technologie </S>)

$= 0{,}004^{-\frac{1}{5}} = 3{,}0171$

b) „Karlsruher für Technologie Institut“

Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von 3-grammen:

$$\hat{P}(W) = P(w_1, w_2, ..., w_n) = \prod_{i=1}^{n} P(w_i | w_{i-2} w_{i-1})$$

P(<S> Karlsruher für Technologie Institut </S>)

= 0,5 * 0,05* 0,1 * 0,2 * 0,6 = 0,0003

Aufgabe 4: Sprachmodelle

b) „Karlsruher für Technologie Institut “

$$PP(W) = 2^{\hat{H}(W)} \text{ mit } \hat{H}(W) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})$$

Umformung:

$$PP(W) = 2^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})}$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})}$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= 2^{log_2 \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}$$

PP(<S> Karlsruher für Technologie Institut </S>) = $0{,}0003^{-\frac{1}{5}}$ = 5,065

c) „Institut Karlsruher Technologie für“

Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von 3-grammen:

$$\hat{P}(W) = P(w_1, w_2, ..., w_n) = \prod_{i=1}^{n} P(w_i | w_{i-2} w_{i-1})$$

P(<S> Institut Karlsruher Technologie für </S>)

= 0,25 * 1 * 0,4 * 0,4 * 0,5 = 0,02

c) „Institut Karlsruher Technologie für"

$$PP(W) = 2^{\hat{H}(W)} \text{ mit } \hat{H}(W) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})$$

Umformung:

$$PP(W) = 2^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})}$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})}$$

$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} log_2 P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= 2^{log_2 \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(w_i|w_{i-2}w_{i-1})^{-\frac{1}{n}}$$

PP((<S> Institut Karlsruher Technologie für </S>) = $0{,}02^{-\frac{1}{5}}$
= 2,1867

Aufgabe 4: Sprachmodelle
d) „Für Institut Institut Technologie“

Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von 3-Grammen:

$$\hat{P}(W) = P(w_1, w_2, ..., w_n) = \prod_{i=1}^{n} P(w_i | w_{i-2} w_{i-1})$$

P(<S> Tee trinken und abwarten </S>)

= ERROR (3-Gramm nicht in Sprachmodell)

Aufgabe 4: Sprachmodelle
Online-Frage Nr.3

cabd

Aufgabe 5: Wortfehlerrate

$$WER = \frac{N_{sub} + N_{del} + N_{ins}}{N}$$

N_{sub}: Anzahl Ersetzungen
N_{del}: Anzahl Löschvorgänge
N_{ins}: Anzahl Einfügungen

Von der Referenz die Hypothese bilden.

Aufgabe 5: Wortfehlerrate
a)

Hypothese: “bluten Morgen wie geht es hier”
Referenz: “guten Morgen wie geht es”

sub, match, match, match, match, ins → WER = 2/5 = 40 %

Aufgabe 5: Wortfehlerrate
b)

Hypothese: “es das Maus ist und groß”
Referenz: “das Haus ist blau und groß”

ins, match, sub, match, del, match, match → WER = 3/6 = 50 %

Aufgabe 5: Wortfehlerrate
c)

Hypothese: “die automatische Sprache Erkennung ist schwierig es”
Referenz: “automatische Spracherkennung ist schwierig”

ins, match, sub, ins, match, match, ins → WER = 4/4 = 100 %

Aufgabe 5: Wortfehlerrate
d) Onlinefrage Nr. 4

Hypothese: “Wen essen Sommer wie der Wahn ist, gehen vier Eisen”
Referenz: “Wenn es im Sommer wieder warm ist, gehen wir Eis essen”

sub, sub, del, match, sub, ins, sub, match, match, sub, sub, del
→ WER = 9/11 = 81,18 %

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

Minimale Editierdistanz

$$D_{0,0} = 0$$

$$D_{i,j} = min \begin{cases} D_{i-1,j-1} + 0, \textit{falls match} \\ D_{i-1,j-1} + 1, \textit{falls sub} \\ D_{i-1,j} + 1, \textit{falls ins} \\ D_{i,j-1} + 1, \textit{falls del} \end{cases}$$

		im	Juni	viel	Donner	bringt	einen	trüben	Sommer
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
im	1								
Juni	2								
viel	3								
Donner	4								
bringt	5								
einen	6								
trüben	7								
Sommer	8								

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

```
def levenshtein(s1, s2):
    if len(s1) < len(s2):
        return levenshtein(s2, s1)
    if len(s2) == 0:
        return len(s1)

    previous_row = range(len(s2) + 1)
    for i, c1 in enumerate(s1):
        current_row = [i + 1]
        for j, c2 in enumerate(s2):
            insertions = previous_row[j + 1] + 1 # rows are longer than s2
            deletions = current_row[j] + 1
            substitutions = previous_row[j] + (c1 != c2)
            current_row.append(min(insertions, deletions, substitutions))
        previous_row = current_row

    return previous_row[-1]
```

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

```
def levenshtein(s1, s2, backtracking=False):
    if len(s1) < len(s2):
        return levenshtein(s2, s1, backtracking=backtracking)
    if len(s2) == 0:
        return len(s1)

    path = []
    previous_row = range(len(s2) + 1)
    path.append(['start'] + ['del'] * len(s2))

    for i, c1 in enumerate(s1):
        current_row = [i + 1]
        current_row_path = ['ins']
        for j, c2 in enumerate(s2):
            insertions = previous_row[j + 1] + 1
            deletions = current_row[j] + 1
            substitutions = previous_row[j] + (c1 != c2)
            current_row.append(min(insertions, deletions, substitutions))
```

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

```
            if insertions < deletions and insertions < substitutions:
                current_row_path.append('ins')
            elif deletions < insertions and deletions < substitutions:
                current_row_path.append('del')
            elif c1 == c2:
                current_row_path.append('match')
            else:
                current_row_path.append('sub')

        previous_row = current_row
        path.append(current_row_path)

    if backtracking:
        return previous_row[-1], path

    return previous_row[-1]
```

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

Demo time

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
a) Programmieren

Referenz: wenn es im Juni viel donnert kommt ein trüber Sommer

Hypothese	Word edit distance	
im Juni viel Sonne kommt einen trüberen Sommer	5	
viel Donner im Juni einen trüben Sommer bringt	8	
Juni Donner einen Sommer	8	
im Juni viel Donner bringt einen trüben Sommer	6	
wenns im Juno viel Donner gibts einen trüben Sommer	7	

Hypothese 1 ist der Referenz am ähnlichsten

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
b) Programmieren

Referenz: wenn es im Juni viel donnert kommt ein trüber Sommer

Hypothese	Word edit distance	Character edit dist.
im Juni viel Sonne kommt einen trüberen Sommer	5	15
viel Donner im Juni einen trüben Sommer bringt	8	33
Juni Donner einen Sommer	8	30
im Juni viel Donner bringt einen trüben Sommer	6	18
wenns im Juno viel Donner gibts einen trüben Sommer	7	13

Hypothese 5 ist der Referenz am ähnlichsten (character edit distance)

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
b) Programmieren

Der Code kann gleich bleiben, anstatt eine Liste mit Wörtern wird eine Liste von Buchstaben übergeben (in Python verhält sich ein String ähnlich wie eine Liste von Buchstaben)

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
c) Programmieren

Referenz: wenn es im Juni viel donnert kommt ein trüber Sommer

Hypothese	Word edit distance	Word edit distance, sub=2
im Juni viel Sonne kommt einen trüberen Sommer	5	8
viel Donner im Juni einen trüben Sommer bringt	8	12
Juni Donner einen Sommer	8	10
im Juni viel Donner bringt einen trüben Sommer	6	10
wenns im Juno viel Donner gibts einen trüben Sommer	7	13

Aufgabe 6: Dynamische Programmierung
c) *Onlinefrage Nr. 5: Niedrigste Distanz*

1) 4, 6
2) 1, 5
3) 2, 5
4) 3, 8
5) 1, 8
6) 2, 6

Kognitive Systeme
Übung 4
Bildverarbeitung – Teil 1

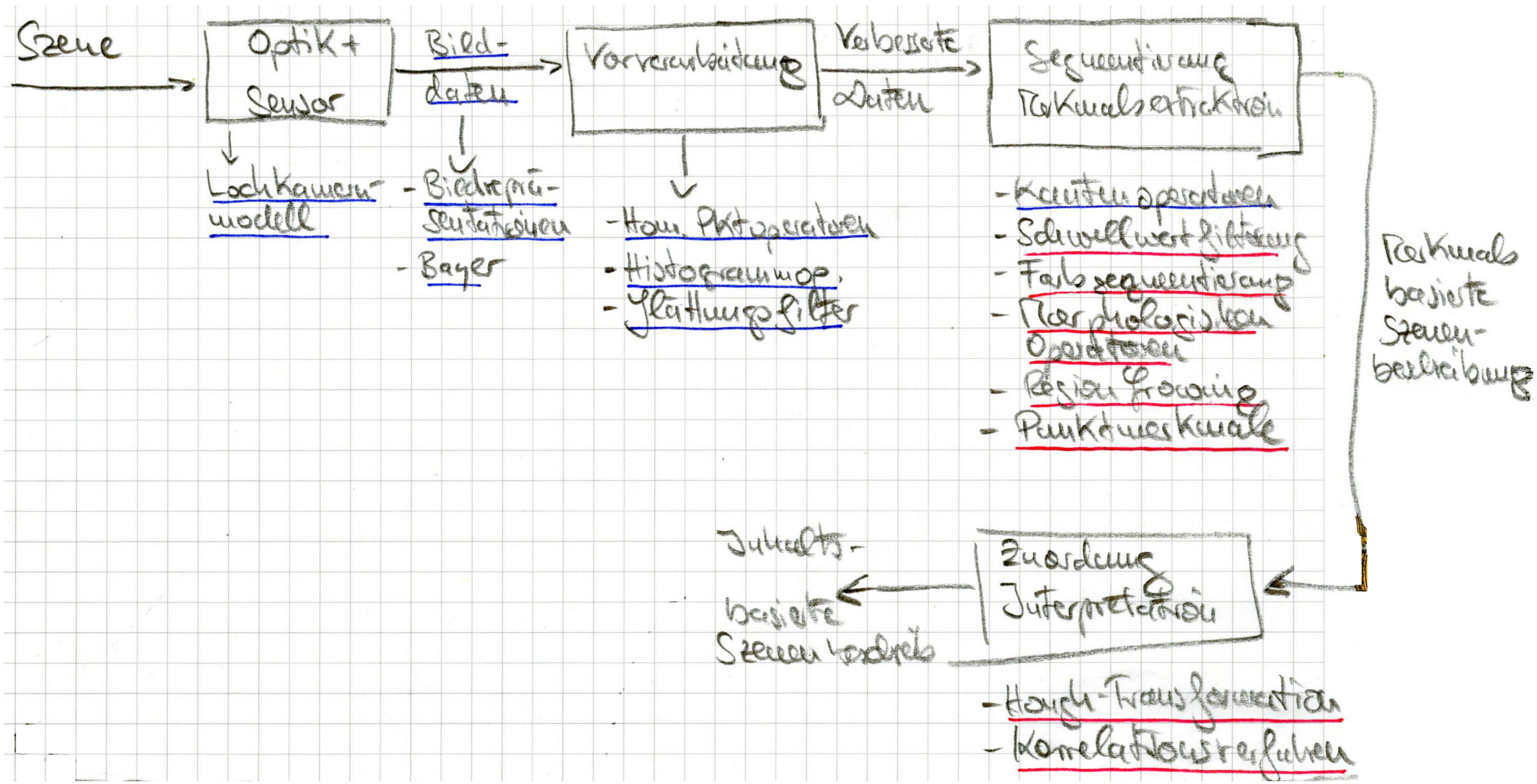
08.07.2019, Pascal Meißner

Überblick

- Erläuterung einer klassischen Maschinensehen-Pipeline an der Tafel inkl. Einordnung der Verfahren
- Interaktive Wiederholung von Vorlesungsinhalten
- Spezielle Beispiele zum Histogrammausgleich
- Beispiele Kantenfilter
- Übungsblatt 4

Maschinensehen-Pipeline

- Handschriftliche Herleitung in der Übung (© P. Meißner)



Spezielle Beispiele zum Histogrammausgleich

Histogrammausgleich – Beispiel 1

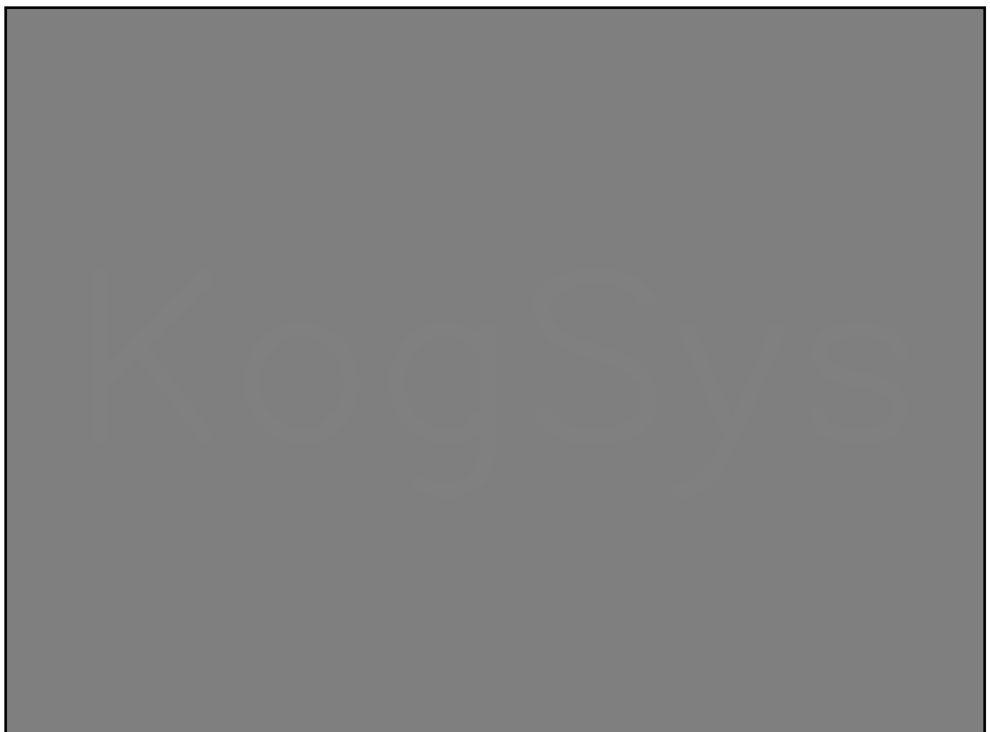
- Eingabebild mit Verteilung:
  0: 25%, 127: 25%, 128: 25%, 255: 25%

Histogrammausgleich – Beispiel 1

- Ausgabebild nach Histogrammausgleich:

Histogrammausgleich – Beispiel 2

- Eingabebild mit Verteilung:
  127: ≈94%, 128: ≈6%

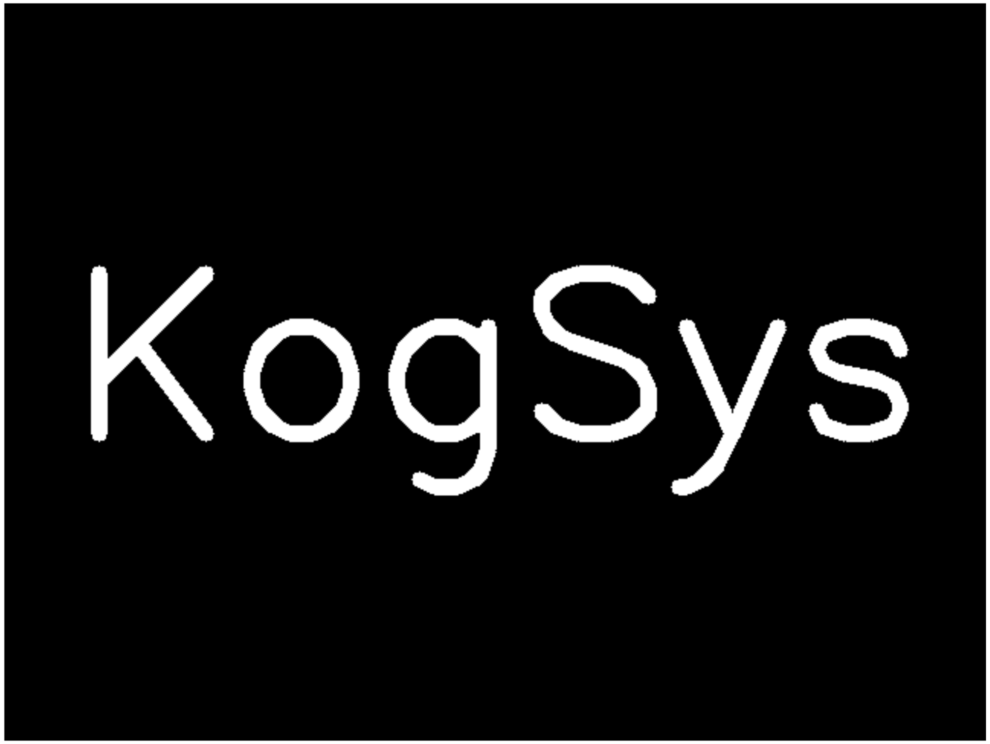


Histogrammausgleich – Beispiel 2

- Ausgabebild nach Histogrammausgleich
  ⇨ Zeigt, dass Kontrast der Ausgabe von der prozentualen Verteilung im Eingabebild abhängt.

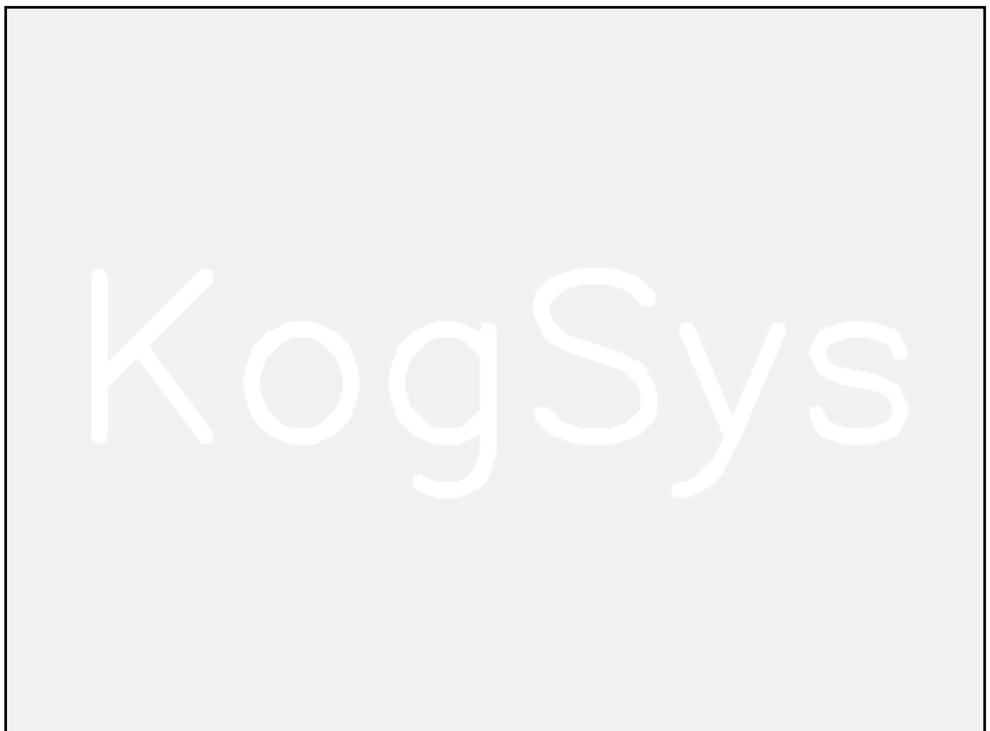
Histogrammausgleich – Beispiel 3

- Eingabebild mit Verteilung:
  0: ≈94%, 255: ≈6%



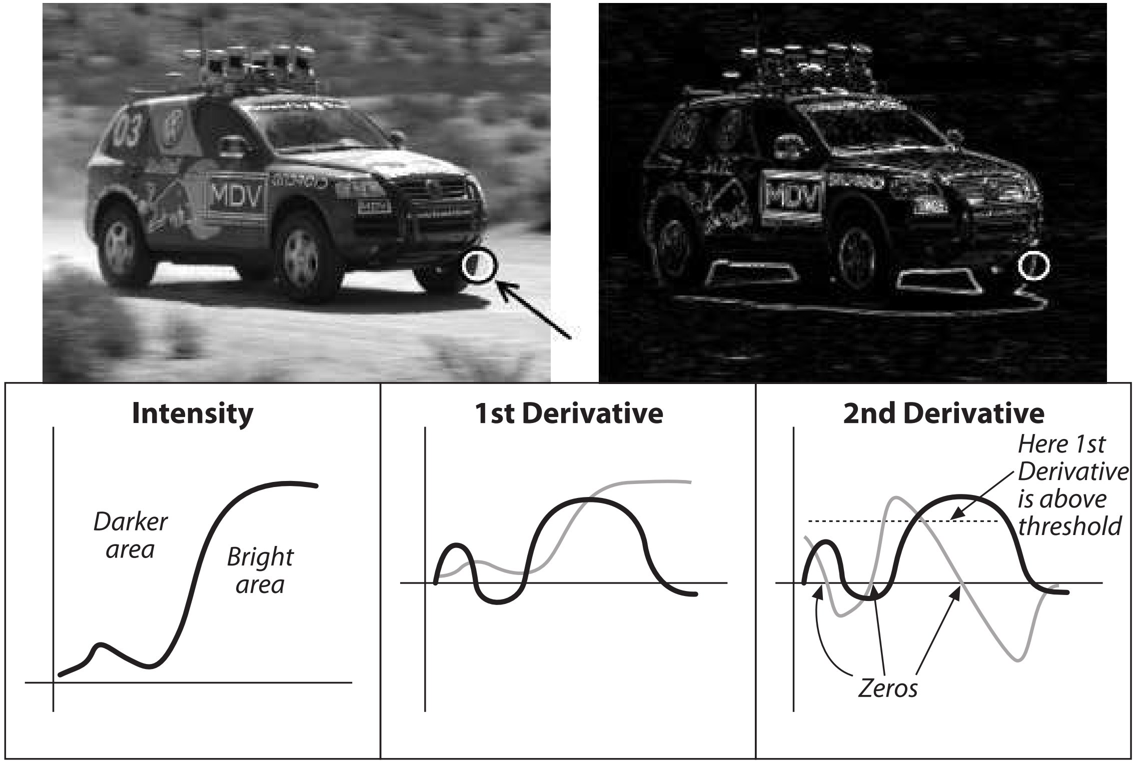
Histogrammausgleich – Beispiel 3

- Ausgabebild nach Histogrammausgleich
  - ⇨ Zeigt, dass der Algorithmus auch zu einer Kontrastverminderung führen kann.



Motivation - Kantenfilter

- Kanten entsprechen Diskontinuitäten in der Bildfunktion.
  - Extrema der ersten Ableitung der Bildfunktion.
  - Nullstellen der zweiten Ableitung der Bildfunktion.



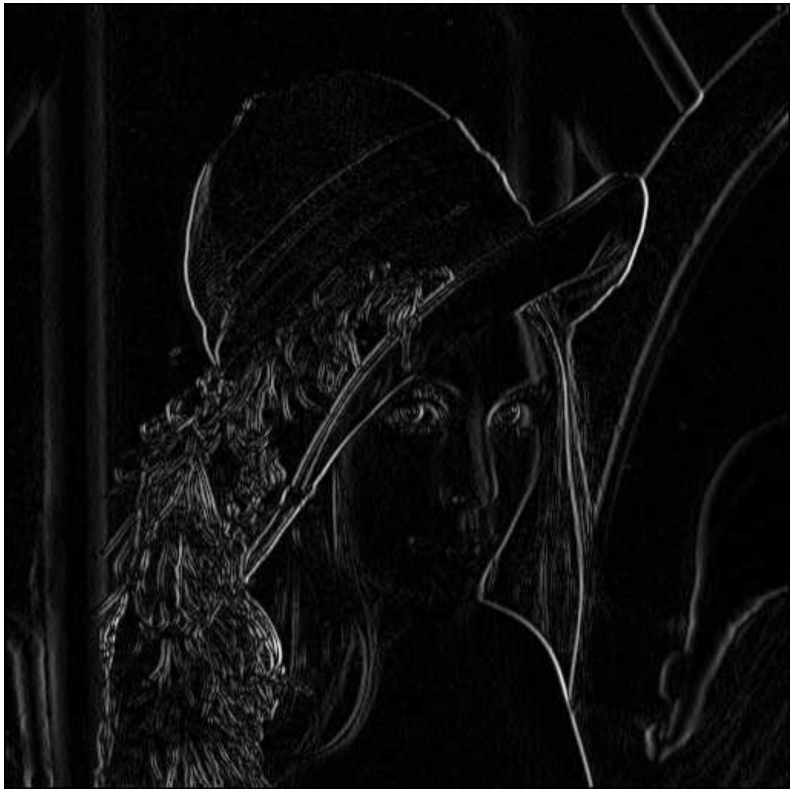
[Bradski 08]

Beispiele Kantenfilter

Beispiele Kantenfilter

Originalbild

Beispiele Kantenfilter



Ergebnis nach Anwendung der Filter PrewittX (links) und PrewittY (rechts)

Beispiele Kantenfilter

Fusionierung der Ergebnisse von PrewittX und PrewittY

Beispiele Kantenfilter

Ergebnis nach Anwendung der Filter SobelX (links) und SobelY (rechts)

Beispiele Kantenfilter

Fusionierung der Ergebnisse von SobelX und SobelY

Beispiele Kantenfilter

- Canny-Kantendetektor entspricht dem Stand der Technik
  - Enthält ein Gauss-Filter und Prewitt/Sobel-Filter
  - Demo unter:
    - http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/edgeDetector/

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Farbdarstellungen

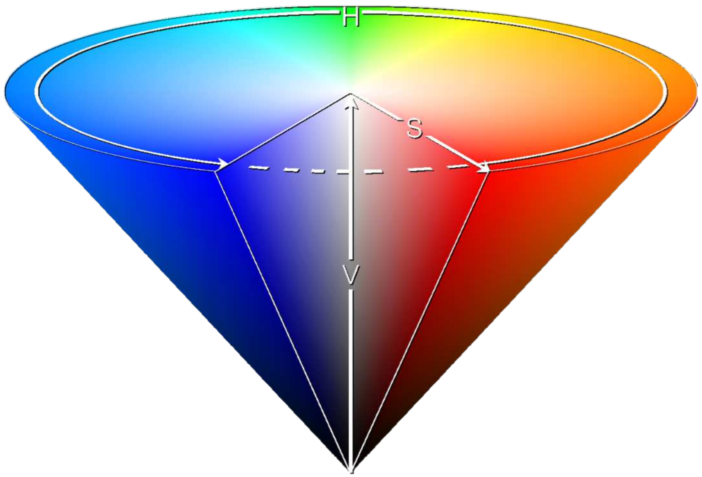
Bestimmen Sie H, S und I für die in RGB gegebenen Farben $\mathbf{r} = (1\ 0\ 0)^T$, $\mathbf{g} = (0\ 1\ 0)^T$ und $\mathbf{b} = (0\ 0\ 1)^T$.

$$c = \arccos \frac{2R - G - B}{2\sqrt{(R-G)^2 + (R-B)(G-B)}}$$

$$H = \begin{cases} c & \text{falls } B < G \\ 360° - c & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B} \min(R,G,B)$$

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B)$$



[Wikipedia für HSV]

Aufgabe 1: Farbdarstellungen

$$\mathbf{r} = (1\ 0\ 0)^T\text{: } c = \arccos(1) = 0^\circ \Rightarrow H = 0^\circ, S = 1, I = 1/3$$
$$\mathbf{g} = (0\ 1\ 0)^T\text{: } c = \arccos(-0{,}5) = 120^\circ \Rightarrow H = 120^\circ, S = 1, I = 1/3$$
$$\mathbf{b} = (0\ 0\ 1)^T\text{: } c = \arccos(-0{,}5) = 120^\circ \Rightarrow H = 240^\circ, S = 1, I = 1/3$$

Aufgabe 1: Farbdarstellungen

Bestimmen Sie für die in RGB gegebene Farbe $\mathbf{f} = (1\ 1\ 1)^T$ den H, S und I-Wert. Erklären Sie, weshalb die Berechnung des H-Wertes nicht möglich ist.

$\mathbf{f} = (1\ 1\ 1)^T$: $H =$ undefiniert, $S = 0$, $I = 1$
Für weiß (S = 0) und schwarz (I = 0) ist der H-Wert undefiniert.

Onlinefrage Nr. 1:
Den Unterschied zwischen den Farben Rot und Pastell-Rot kann man anhand des Wertes Saturation erkennen.

Aufgabe 1: Farbdarstellungen

- Beispielhafte Definitionen von
  - Rot (https://www.colorhexa.com/ff0000)
    - (1 0 0) in RGB bzw. (0 1 0,33) in HSI
  - Pastellrot (https://www.colorhexa.com/ff6961)
    - (1 0,41 0,38) in RGB bzw. (0 0,36 0,6) in HSI

- HSV/HSI-Farben interaktiv zusammenstellen
  - http://colorizer.org
  -

Aufgabe 2: Lochkameramodell

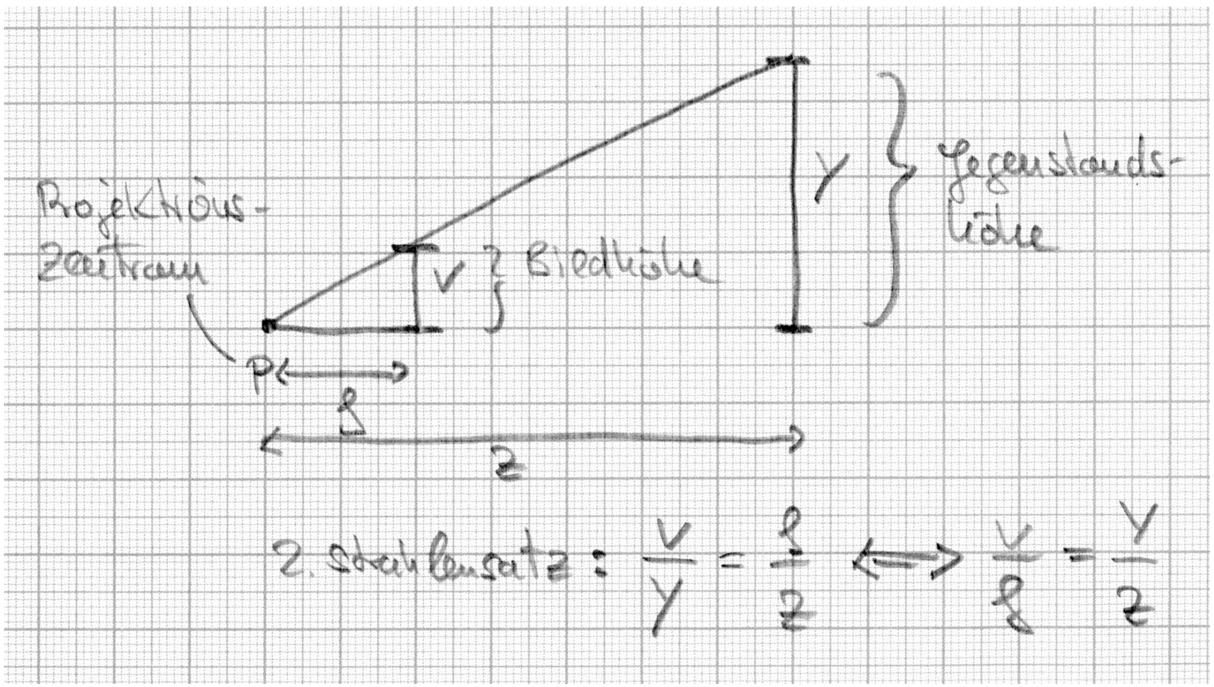
Gegeben sind zwei Kameras. Beide Kameras zeigen in z-Richtung (d.h. ihre Bildebenen sind parallel) und sind nur in x-Richtung zueinander verschoben. Das in der Vorlesung vorgestellte Lochkameramodell in Positivlage soll verwendet werden; es gelten also die Gleichungen für das Lochkameramodell ohne Minuszeichen. Die beiden Projektionszentren der Kameras haben den Abstand $b = 100\,\mathrm{mm}$. Das Kamerakoordinatensystem jeder Kamera hat seinen Ursprung im jeweiligen Projektionszentrum, die x-Achse zeigt nach rechts, die y-Achse nach unten und die z-Achse nach vorne. Das Bildkoordinatensystem jeder Kamera hat seinen Ursprung in der Mitte des CCD-Chips. Das Weltkoordinatensystem ist identisch mit dem Kamerakoordinatensystem der linken Kamera. Beide Kameras besitzen eine Brennweite von $f = 5\,\mathrm{mm}$, einen CCD-Chip von $6.4\,\mathrm{mm} \times 4.8\,\mathrm{mm}$ Größe, mit 640×480 CCD-Zellen. Es kann angenommen werden, dass die einzelnen CCD-Zellen lückenlos aneinander anschließen, quadratisch und gleich groß sind.

2.a

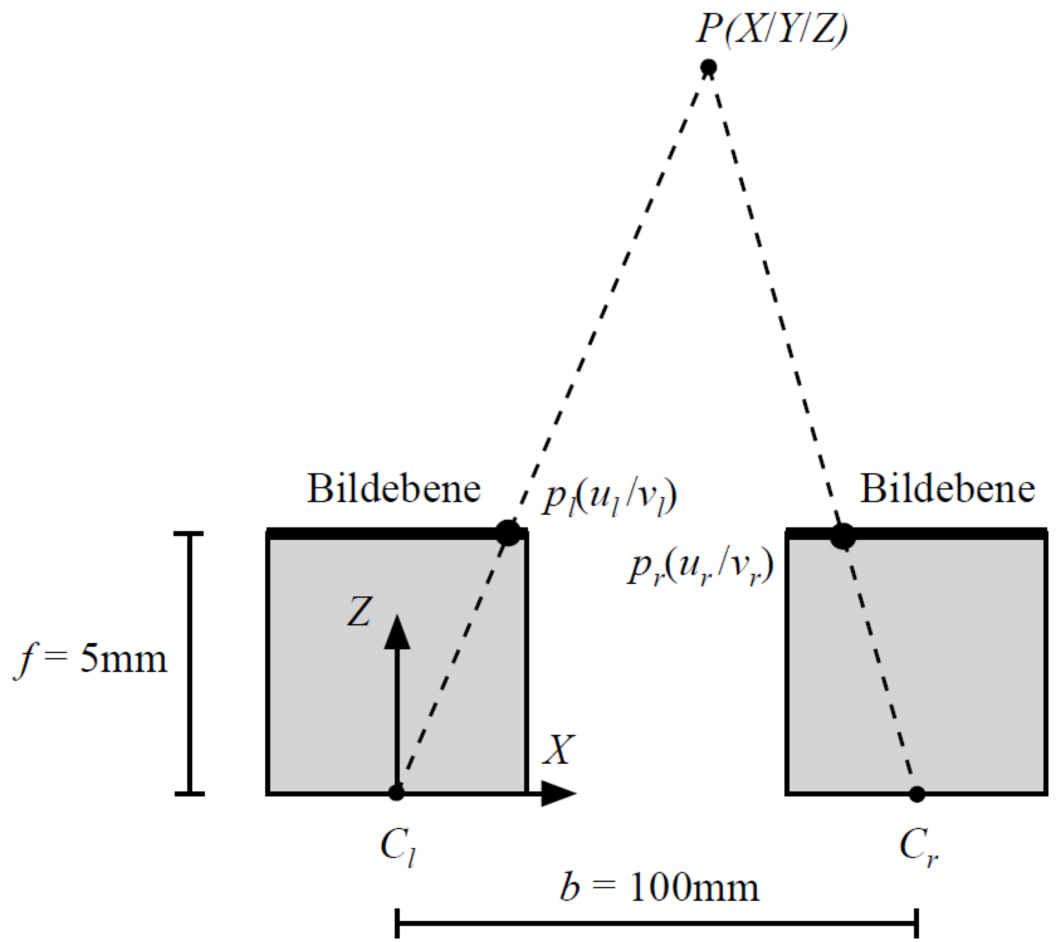
Skizzieren Sie die Anordnung. Auf welchen Bildpunkt $p(u/v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ der linken Kamera wird der Punkt $P(-0{,}3\ \mathrm{m}\ /\ 0{,}5\ \mathrm{m}\ /\ 1{,}0\ \mathrm{m})$ abgebildet?

Aufgabe 2: Lochkameramodell

- Handschriftliche Herleitung der 2D-Projektion des Lochkameramodells in Positivlage aus 2. Strahlensatz



Aufgabe 2: Lochkameramodell



Aufgabe 2: Lochkameramodell

Ein Pixel ist $\frac{6{,}4\ \mathrm{mm}}{640} = \frac{4{,}8\ \mathrm{mm}}{480} = 0,01\mathrm{mm}$ hoch und breit $\Rightarrow$ Umrechnungsfaktor ist $\frac{1}{0{,}01}\frac{Pixel}{\mathrm{mm}} = 100\frac{Pixel}{\mathrm{mm}}$.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{f}{Z}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{5\ \mathrm{mm}}{1000\ \mathrm{mm}}\begin{pmatrix} -300\ \mathrm{mm} \\ 500\ \mathrm{mm} \end{pmatrix} = \frac{500\ \mathrm{Pixel}}{1000\ \mathrm{mm}}\begin{pmatrix} -300\ \mathrm{mm} \\ 500\ \mathrm{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150\ \mathrm{Pixel} \\ 250\ \mathrm{Pixel} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Lochkameramodell

2.b

Die linke Kamera liefert einen Bildpunkt $p_l(0\ /\ -125)$ (in Pixeln). Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der linken Kamera definierte Gerade g_l aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_l abbilden. Die rechte Kamera liefert einen Bildpunkt $p_r(-250\ /\ -125)$. Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der rechten Kamera definierte Gerade g_r aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_r abbilden. Gehen Sie bei den Berechnungen von einer als Punkt idealisierten CCD-Zelle aus.

Aufgabe 2: Lochkameramodell

2.b

Die linke Kamera liefert einen Bildpunkt $p_l(0\ /\ -125)$ (in Pixeln). Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der linken Kamera definierte Gerade g_l aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_l abbilden. Die rechte Kamera liefert einen Bildpunkt $p_r(-250\ /\ -125)$. Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der rechten Kamera definierte Gerade g_r aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_r abbilden. Gehen Sie bei den Berechnungen von einer als Punkt idealisierten CCD-Zelle aus.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{f}{Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = \frac{f}{Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$g_l : \vec{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ f \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} 0 \text{ Pixel} \\ -125 \text{ Pixel} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} 0 \text{ mm} \\ -1{,}25 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \text{ mm} \\ -1{,}25 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Lochkameramodell

2.b

Die linke Kamera liefert einen Bildpunkt $p_l(0\ /\ -125)$ (in Pixeln). Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der linken Kamera definierte Gerade g_l aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_l abbilden. Die rechte Kamera liefert einen Bildpunkt $p_r(-250\ /\ -125)$. Bestimmen Sie die im Kamerakoordinatensystem der rechten Kamera definierte Gerade g_r aller Punkte, die sich auf den Bildpunkt p_r abbilden. Gehen Sie bei den Berechnungen von einer als Punkt idealisierten CCD-Zelle aus.

$$g_r : \vec{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ f \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} -250 \text{ Pixel} \\ -125 \text{ Pixel} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} -2{,}5 \text{ mm} \\ -1{,}25 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2{,}5 \text{ mm} \\ -1{,}25 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Lochkameramodell

2.c

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation vom rechten Kamerakoordinatensystem in das Weltkoordinatensystem und berechnen Sie mit deren Hilfe die Darstellung der Gerade g_r im Weltkoordinatensystem. Berechnen Sie nun den Schnitt der (im Weltkoordinatensystem dargestellten) Geraden g_l und g_r und somit die Koordinaten des Punktes S, der sich auf die Bildpunkte p_l und p_r abgebildet hat.

Aufgabe 2: Lochkameramodell

Im Folgenden wird die Einheit [mm] der Einfachheit wegen weggelassen. Koordinatentransformation:

g_r muss ins Weltkoordinatensystem transformiert werden. Die Orientierung bleibt dabei unverändert, aber es ist eine translative Koordinatentransformation notwendig, um die Verschiebung relativ zur linken Kamera zu berücksichtigen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} \to \vec{x} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_r : \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -1{,}25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Lochkameramodell

Gleichsetzen der im Weltkoordinatensystem definierten Geraden g_l und g_r ergibt:

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -1{,}25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $r = s = 40$ und somit:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 2:
Die Koordinaten des Punktes S aus Aufgabe 2.c lauten $S(0\text{ mm} \,/\, -50\text{ mm} \,/\, 200\text{ mm})$.

Aufgabe 2: Lochkameramodell

2.d

Aufgrund von Bildrauschen wird durch die Bildverarbeitung der Punkt $p'_l = (0 \; / \; -126)$ statt p_l berechnet. Berechnen Sie die entsprechende Gerade g'_l. Was hat dies zur Folge? Wie lässt sich dennoch ein 3D-Punkt berechnen? Beschreiben Sie Ihren Ansatz und stellen Sie eine allgemeine Gleichung für die Berechnung der Lösung auf – eine Rechnung mit Zahlen wird nicht verlangt.

Aufgabe 2: Lochkameramodell

Dies hat zur Folge, dass sich die Geraden g_l' und g_r nicht exakt in einem Punkt schneiden, sondern windschief sind. Der optimale Schnittpunkt S' kann beispielsweise entweder als Mittelpunkt der kürzesten Verbindungsstrecke zweier windschiefer Geraden berechnet werden oder über die Lösung eines überbestimmten LGS. Letztere Variante wird im Folgenden vorgerechnet. Gegeben seien allgemein zwei Geraden g_l und g_r:

$$g_l : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$$
$$g_r : \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$$

Gleichsetzen von g_l und g_r ergibt:

$$r\vec{u} - s\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \vec{b} - \vec{a}$$

Aufgabe 2: Lochkameramodell

Mit

$$A := \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \vec{b} - \vec{a}$$

ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein überbestimmtes LGS, dessen optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ im Sinne der euklidischen Norm beispielsweise durch Lösung der Normalengleichung $A^T A\mathbf{x}^* = A^T\mathbf{b}$ zu

$$\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

berechnet werden kann (numerisch stabilere Lösungsverfahren basieren auf der Singulärwertzerlegung oder QR-Zerlegung). Mit $(r^*, s^*) := \mathbf{x}^*$ lässt sich der Punkt mit dem geringsten Abstand zu beiden Geraden berechnen zu:

$$\mathbf{s}' = \frac{\mathbf{a} + r^* \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} + s^* \cdot \mathbf{v}}{2}$$

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.a

Berechnen Sie das Ergebnisbild nach Ausführung einer Spreizung für die untenstehende Bildmatrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 80 & 80 & 120 & 0 \\ 100 & 100 & 120 & 255 \\ 100 & 160 & 160 & 120 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.a

Berechnen Sie das Ergebnisbild nach Ausführung einer Spreizung für die untenstehende Bild

$$B = \begin{pmatrix} 80 & 80 & 120 & 0 \\ 100 & 100 & 120 & 255 \\ 100 & 160 & 160 & 120 \end{pmatrix}$$

Da sowohl die Intensität 0 als auch 255 vorhanden sind, verändert die Spreizung das Bild nicht. Es gilt also $B' = B$.

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.b

Berechnen Sie das Histogramm $H(x)$ und das akkumulierte Histogramm $H_a(x)$ für die Bildmatrix B. Berechnen Sie nun das Ergebnisbild nach Ausführung einer Histogrammdehnung. Verwenden Sie dazu die Quantile 0.1 und 0.9. Runden Sie dabei alle Einträge durch kaufmännisches (="normales") Runden auf ganzzahlige Werte.

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.b

Berechnen Sie das Histogramm $H(x)$ und das akkumulierte Histogramm $H_a(x)$ für die Bildmatrix B. Berechnen Sie nun das Ergebnisbild nach Ausführung einer Histogrammdehnung. Verwenden Sie dazu die Quantile 0.1 und 0.9. Runden Sie dabei alle Einträge durch kaufmännisches (="normales") Runden auf ganzzahlige Werte.

Das Histogramm $H(x)$ mit $H : \{0, ..., 255\} \to \mathbb{Z}$ lautet:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2 & x = 80 \\ 3 & x = 100 \\ 3 & x = 120 \\ 2 & x = 160 \\ 1 & x = 255 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

Für das akkumulierte Histogramm $H_a(x)$ gilt:

$$H_a(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 79 \\ 3 & 80 \leq x \leq 99 \\ 6 & 100 \leq x \leq 119 \\ 9 & 120 \leq x \leq 159 \\ 11 & 160 \leq x \leq 254 \\ 12 & x = 255 \end{cases}$$

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

Das 0,1-Quantil berechnet sich zu $H_q(0{,}1) = 80$ und das 0,9-Quantil zu $H_q(0{,}9) = 160$. Die Parameter der affinen Punktoperation $I'(u,v) = aI(u,v) + b$ sind also $a = \frac{255}{160-80} = 3,1875$ und $b = -\frac{255 \cdot 80}{160-80} = -255$. Damit ergibt sich die folgende neue Bildmatrix B':

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 128 & 0 \\ 64 & 64 & 128 & 255 \\ 64 & 255 & 255 & 128 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 3:
***Die Summe aller Einträge der neuen Bildmatrix beträgt* 1341.**

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.c

Berechnen Sie das Ergebnisbild nach Ausführung eines Histogrammausgleichs auf B. Runden Sie dabei alle Einträge durch kaufmännisches Runden auf ganzzahlige Werte.

Aufgabe 3: Kontrastanpassung

3.c

Berechnen Sie das Ergebnisbild nach Ausführung eines Histogrammausgleichs auf B. Runden Sie dabei alle Einträge durch kaufmännisches Runden auf ganzzahlige Werte.

Es gilt $H_n(x) = \frac{255}{12} \cdot H_a(x)$. Anwendung von $H_n(x)$ ergibt die neue Bildmatrix B':

$$B' = \begin{pmatrix} 64 & 64 & 191 & 21 \\ 128 & 128 & 191 & 255 \\ 128 & 234 & 234 & 191 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 4:
Die Summe aller Einträge der neuen Bildmatrix beträgt **1829.**

Aufgabe 4: Filter

4.a

Zeigen Sie, dass die Filtermatrix $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Approximation eines Gauß-Filters mit $\sigma = 0.85$ ist.

Aufgabe 4: Filter

Die Formel zur Berechnung des Gauß-Filters lautet:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Als Abschätzung für die Filtergröße ergibt sich: $n = \lfloor 2 \cdot 0.85 \rfloor \cdot 2 + 1 = 3$, d.h. $x, y \leq 1$. Es ergibt sich somit die folgende Filtermatrix:

$$\begin{pmatrix} 0.0552 & 0.1103 & 0.0552 \\ 0.1103 & 0.2203 & 0.1103 \\ 0.0552 & 0.1103 & 0.0552 \end{pmatrix}$$

Für den zentralen Eintrag ergibt sich im Vergleich zur gegebenen Filtermatrix der Faktor $\frac{4}{0.2203} \approx 18.16$, und es gilt $0.0552 \cdot 18.12 \approx 1$ sowie $0.1103 \cdot 18.12 \approx 2$.

Bei einem Tiefpassfilter muss die Summe der Einträge 1 betragen, und es gilt $4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$. Es gilt zu beachten, dass in der oben berechneten Filtermatrix die Summe der Einträge einen Wert < 1 besitzt; bei unendlicher Fortsetzung würde die Summe 1 betragen.

Aufgabe 4: Filter

4.b

Berechnen Sie die Bildmatrix B' durch Faltung der untenstehenden Bildmatrix B mit der Filtermatrix aus Teilaufgabe 4.a. Runden Sie dabei alle Einträge durch kaufmännisches Runden auf ganzzahlige Werte. Für Randpixel von B' soll kein Ergebnis berechnet werden, d.h. berechnen Sie nur die Werte des inneren 5×9-Teils von B'.

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Filter

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 50 & 50 & 50 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Filter

4.c

Falten Sie die Bildmatrix B' mit einem Sobel-Filter zur Detektion vertikaler Kanten. Berechnen Sie dabei nur die Werte des inneren 3×7-Teils der Ergebnisbildmatrix.

Aufgabe 4: Filter

$$B' = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$s_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Faltung mit dem Sobel_x-Filter ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 5:
Der betraglich größte Eintrag der neuen Bildmatrix ist 92.

Aufgabe 4: Filter

4.d

Falten Sie die Bildmatrix B' mit einem Sobel-Filter zur Detektion horizontaler Kanten. Berechnen Sie dabei nur die Werte des inneren 3×7-Teils der Ergebnisbildmatrix.

Aufgabe 4: Filter

$$B' = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \qquad s_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Faltung mit dem Sobel$_y$-Filter ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Nächste Vorlesung:

Mittwoch, 10.07.2019

Wissen und Planung 2

Kognitive Systeme
Übung 5
Bildverarbeitung – Teil 2

17.07.2019, Pascal Meißner

Überblick

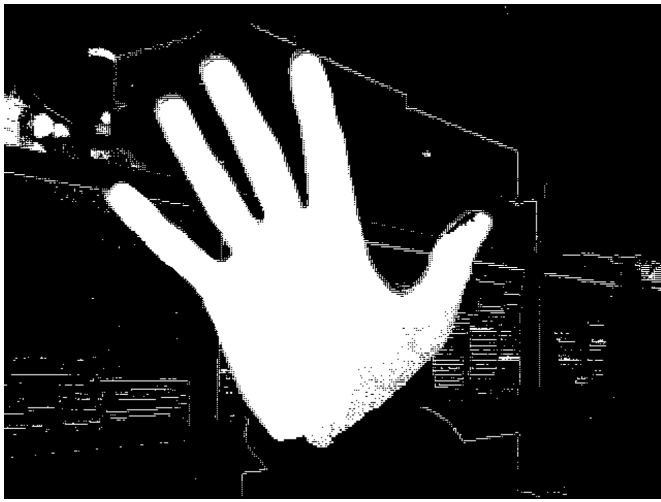
- Interaktive Wiederholung von Vorlesungsinhalten
- Herleitung der Normalisierungen in Korrelationsverfahren
- Erläuterung einer Stereosehen-Pipeline an der Tafel inkl. Einordnung der Verfahren
- Interaktive Wiederholung von Vorlesungsinhalten
- Übungsblatt 5

Wiederholung I: Morphologische Operatoren

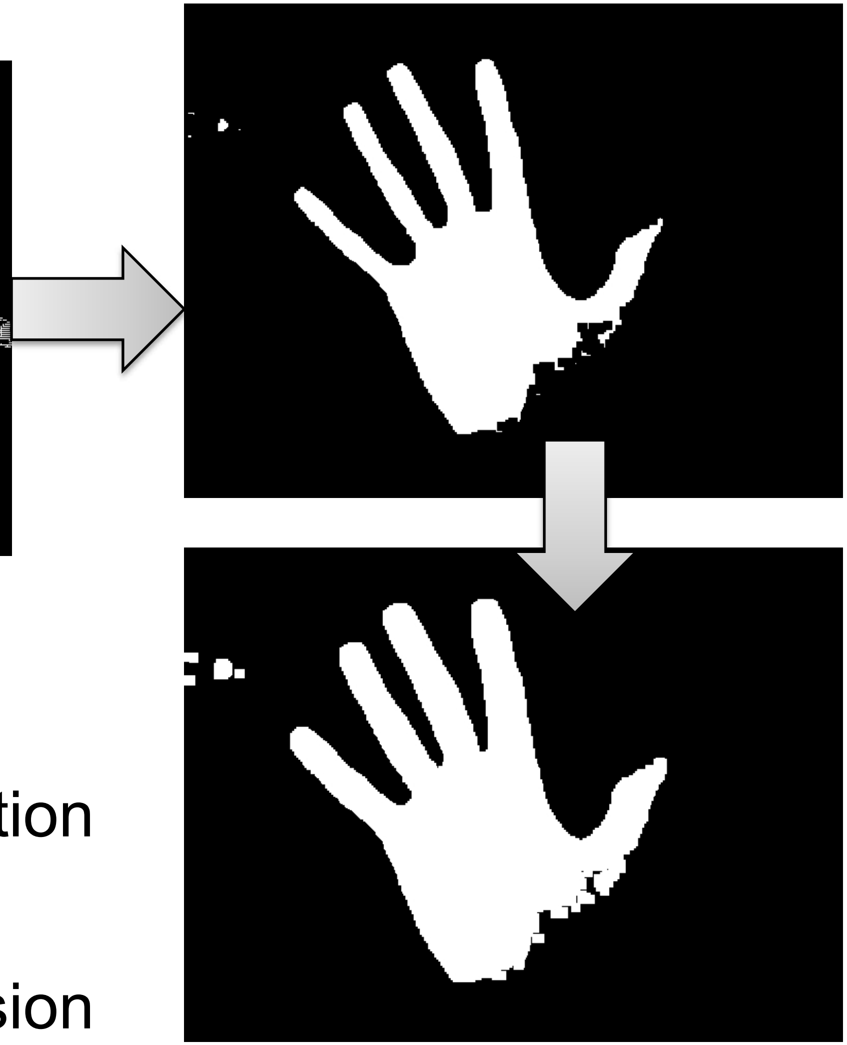
- Operationen auf Binärbildern (hier: Pixel sind 0 oder 255)
- Ziel: Rauschen entfernen oder Lücken schließen

- Dilatation: Alle Pixel, die einen Nachbarn haben, der 255 ist, werden 255 ⇒ Ausdehnung
- Erosion: Alle Pixel, die einen Nachbar haben, der 0 ist, werden 0 ⇒ Verkleinerung

Wiederholung I: Morphologische Operatoren



Eingabebild



Erosion

Dilatation

- Öffnen:

  Erosion → Dilatation
- Schließen:

  Dilatation → Erosion

Wiederholung I: Morphologische Operatoren

- Demo unter:
  - http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/morphology/

Aufgabe 1a: Morphologische Operatoren

Gegeben

- Binäre Bildmatrix B (0: Hintergrund, 255: Vordergrund)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Aufgabe

- 3x3 Schließen-Operation auf die Bildmatrix B
- Werte der mit X markierten Elemente bestimmen

Aufgabe 1a: Schließen

Schließen: Dilatation

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1a: Schließen

Schließen: Dilatation → Erosion

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwort Onlinefrage 1: 2295

Aufgabe 1b: Morphologische Operatoren

Aufgabe

- 3x3 Öffnen-Operation auf die Bildmatrix B
- Werte der mit X markierten Elemente bestimmen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & X & X & X & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1b: Öffnen

Öffnen: Erosion

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1b: Öffnen

Karlsruhe Institute of Technology

Öffnen: Erosion → Dilatation

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wiederholung II: Hough-Transformation

- Standard-Anwendungen
  - Detektion von Geraden
  - Detektion von Kreisen

- Demo unter:
  - http://matlabtricks.com/post-39/understanding-the-hough-transform

Wiederholung II: Hough-Transformation

- Idee:
  - Jeder Bildpunkt wird in den sog. Hough-Raum transformiert
  - Treffer im Hough-Raum werden in sog. Bins akkumuliert
  - Der Hough-Raum repräsentiert eine parametrische Darstellung der gesuchten geometrischen Struktur
  - Instanzen der gesuchten geometrischen Struktur werden durch Maxima im Hough-Raum identifiziert

Aufgabe 2a: Hough-Transformation

Aufgabe

- Transformiere $P_1(-1\ /\ 0)$, $P_2(0\ /-0{,}5)$ und $P_3(1\ /-1)$ in den Hough-Raum
- Zeichnen der entsprechenden Funktionen in ein Hough-Diagramm mit θ und r als Achsen mit dem Schnittpunkt $(r_p\ /\ \theta_p)$ der Kurven

$$r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Aufgabe 2a: Hough-Transformation

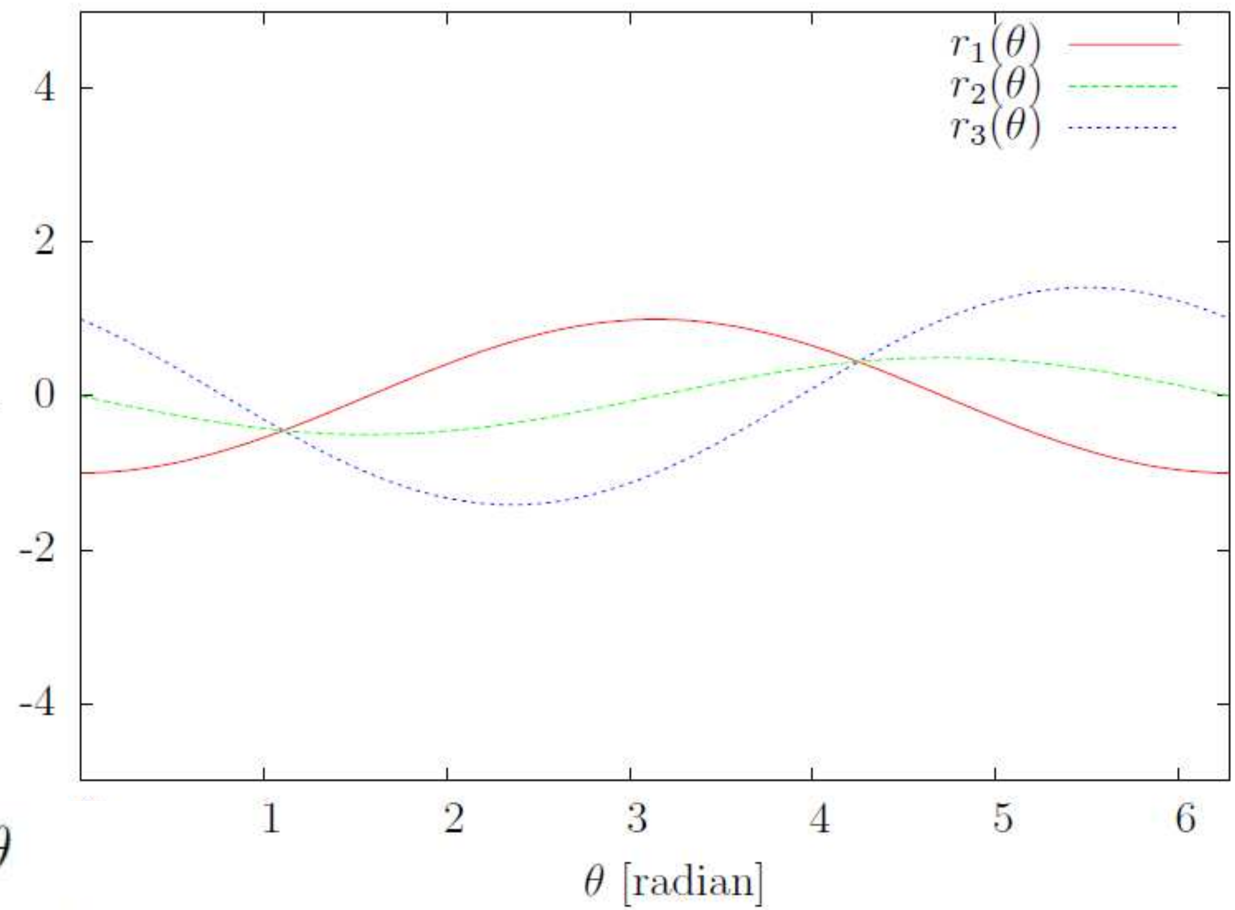
Aufgabe

- Transformiere $P_1(-1\ /\ 0)$, $P_2(0\ /{-0{,}5})$ und $P_3(1\ /{-1})$ in den Hough-Raum
- Zeichnen der entsprechenden Funktionen in ein Hough-Diagramm mit θ und r als Achsen mit dem Schnittpunkt $(r_p\ /\ \theta_p)$ der Kurven

$$r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

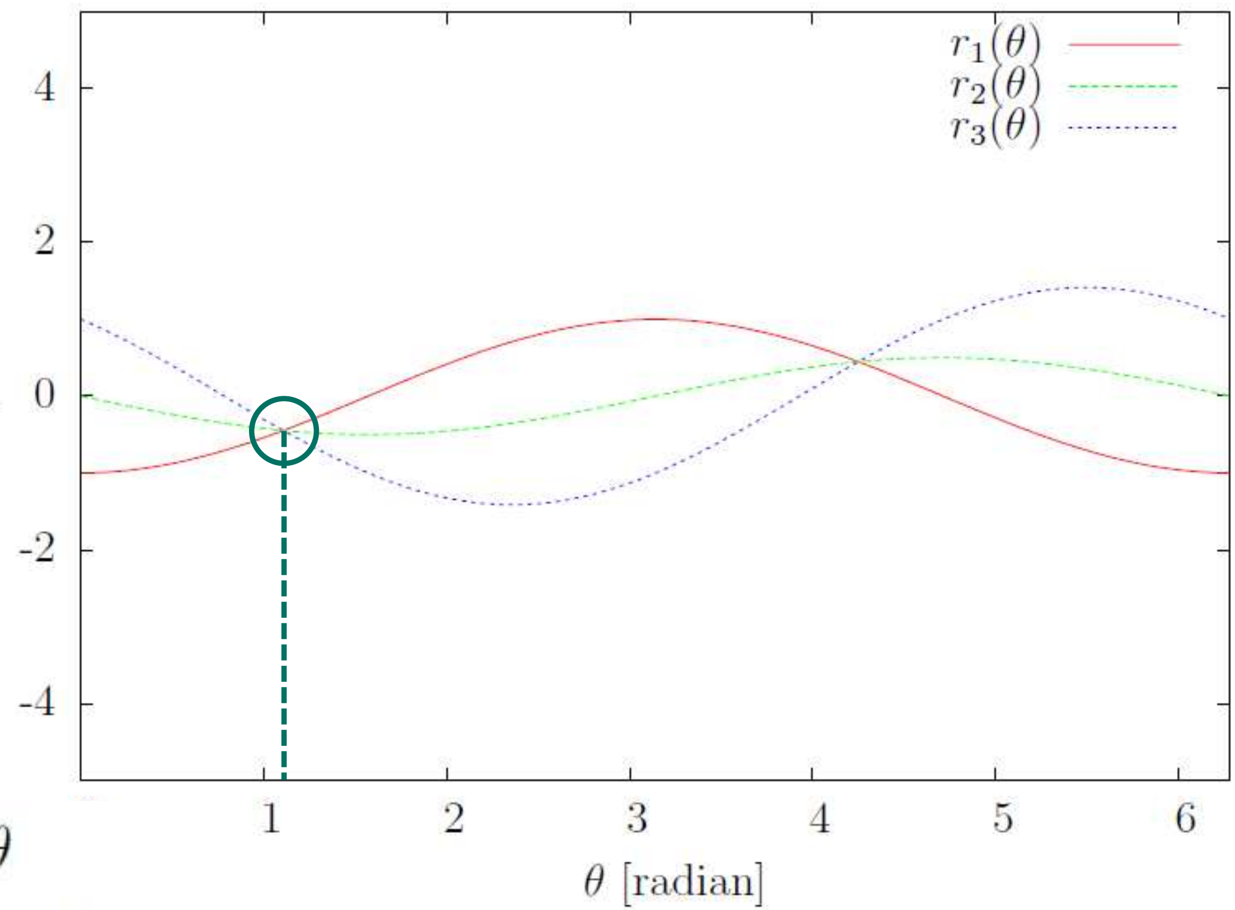
$$\begin{aligned} P_1: \quad r_1 &= -\cos\theta \\ P_2: \quad r_2 &= -0.5\sin\theta \\ P_3: \quad r_3 &= \cos\theta - \sin\theta \end{aligned}$$

Aufgabe 2a: Hough-Transformation



$$P_1: \quad r_1 = -\cos\theta$$
$$P_2: \quad r_2 = -0.5\sin\theta$$
$$P_3: \quad r_3 = \cos\theta - \sin\theta$$

Aufgabe 2a: Hough-Transformation



$$P_1: \quad r_1 = -\cos\theta$$
$$P_2: \quad r_2 = -0.5\sin\theta$$
$$P_3: \quad r_3 = \cos\theta - \sin\theta$$

Schnittpunkt bei ca. 1,1

Aufgabe 2a: Hough-Transformation

$$P_1: \quad r_1 = -\cos\theta$$
$$P_2: \quad r_2 = -0.5\sin\theta$$
$$P_3: \quad r_3 = \cos\theta - \sin\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin\theta \approx \sin 1.1 \approx 0{,}89$$
$$\cos\theta \approx \cos 1.1 \approx 0.45$$
$$r_1 \approx -0{,}45$$

Aufgabe 2a: Hough-Transformation

$$P_1 : \quad r_1 \quad = -\cos\theta$$
$$P_2 : \quad r_2 \quad = -0.5\sin\theta$$
$$P_3 : \quad r_3 \quad = \cos\theta - \sin\theta$$

⇨

$$\sin\theta \approx \sin 1.1 \approx 0,89$$
$$\cos\theta \approx \cos 1.1 \approx 0.45$$
$$r_1 \approx -0,45$$

⇨ $r = x\cos\theta + y\sin\theta$

Die Gerade ist definiert durch:

$$0,45\,x + 0,89\,y = -0,45$$

Aufgabe 2a: Hough-Transformation

$$P_1: \quad r_1 = -\cos\theta$$
$$P_2: \quad r_2 = -0.5\sin\theta$$
$$P_3: \quad r_3 = \cos\theta - \sin\theta$$

$$\sin\theta \approx \sin 1.1 \approx 0{,}89$$
$$\cos\theta \approx \cos 1.1 \approx 0.45$$
$$r_1 \approx -0{,}45$$

$$r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Die Gerade ist definiert durch:

$$0{,}45\,x + 0{,}89\,y = -0{,}45$$

Punkt auf Gerade: (0 , -0,5)

orthogonal

$$g\colon \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0{,}89 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$$

Antwort Onlinefrage 2: 1,1

Aufgabe 2b: Hough-Transformation

Aufgabe

- Regressionsgerade: Optimale Gerade im Sinne der euklidischen Norm in eine gegebene Menge
- Wann ist Regressionsgerade geeigneter, wann Hough-Transformation?

Aufgabe 2b: Hough-Transformation

Aufgabe

- Regressionsgerade: Optimale Gerade im Sinne der euklidischen Norm in eine gegebene Menge
- Wann ist Regressionsgerade geeigneter, wann Hough-Transformation?

Regressionsgerade

- Besser, wenn bekannt ist, welche Punkte zur Geraden gehören
- Dann optimale Näherung in Bezug auf quadr. Fehler

Hough-Transformation *findet* Geraden in Kantenbildern

Wiederholung III: Korrelation

- Sum of Squared Differences (SSD)
  - Quadrierte Euklidische Metrik
  - Anfällig gegenüber Ausreißern
  - Keine Invarianz bzgl. Helligkeitsunterschieden

$$SSD(I_1, I_2) = \sum_u \sum_v (I_1(u,v) - I_2(u,v))^2$$

- Sum of Absolute Differences (SAD)
  - Manhattan - Metrik
  - Weniger anfällig gegenüber Ausreißern
  - Keine Invarianz bzgl. Helligkeitsunterschieden

$$SAD(I_1, I_2) = \sum_u \sum_v \left| I_1(u,v) - I_2(u,v) \right|$$

Wiederholung III: Korrelation

- Erweiterungen um konstante Helligkeitsänderungen zu normalisieren.
  - Subtraktion des Mittelwertes
    - Bezeichnet als „Zero-Mean“-Normalisierung
    - Beispiel: Zero-Mean Sum of Absolute Differences (ZSAD)
    - erzielt Normalisierung bzgl. konstant additiver Helligkeitsänderungen
  - Division durch die Frobeniusnorm
    - Bezeichnet als „Normalized“
    - Beispiel: Normalized Cross Correlation (NCC)
    - erzielt Normalisierung bzgl. konstant multiplikativer Helligkeitsänderungen
  - Kombination
    - Beispiel: Zero-Mean Normalized Cross Correlation (ZNCC)

Wiederholung III: Korrelation

- Handschriftliche Herleitung der Normalisierung additiv konstanter Helligkeitsunterschiede

Additiv konstante Helligkeitsunterschiede:

$$I_1(u,v) + d = I_2(u,v)$$

Normalisierung durch arithmetischen Mittelwert:

$$\bar{I} = \frac{1}{n^2} \sum_u \sum_v I(u,v)$$

z.z. $I_1'(u,v) = I_2'(u,v)$, wobei $I_1'(u,v) = I_1(u,v) - \bar{I}_1$ und

$I_2'(u,v) = I_2(u,v) - \bar{I}_2$

Bew.:

$$\begin{aligned}
I_2'(u,v) &= I_2(u,v) - \bar{I}_2 = \\
&I_2(u,v) - \frac{1}{n^2} \sum_u \sum_v I_2(u,v) = \\
&I_1(u,v) + d - \frac{1}{n^2} \sum_u \sum_v (I_1(u,v) + d) = \\
&I_1(u,v) - \frac{1}{n^2} \sum_u \sum_v I_1(u,v) = \\
&I_1(u,v) - \bar{I}_1 = I_1'(u,v)
\end{aligned}$$

Wiederholung III: Korrelation

- Handschriftliche Herleitung der Normalisierung multiplikativ konstanter Helligkeitsunterschiede

Multiplikativ konstante Helligkeitsunterschiede:

$r \cdot I_1(u,v) = I_2(u,v)$

Normalisierung durch die Frobenius-Norm:

$$\|I\|_H := \sqrt{\sum_u \sum_v I^2(u,v)}$$

z.z. $I_1''(u,v) = I_2''(u,v)$, wobei $I_1''(u,v) = \dfrac{I_1(u,v)}{\|I_1\|_H}$ und

$$I_2''(u,v) = \frac{I_2(u,v)}{\|I_2\|_H}$$

Bew: $$I_2''(u,v) = \frac{I_2(u,v)}{\|I_2\|_H} = \frac{I_2(u,v)}{\sqrt{\sum_u \sum_v I_2^2(u,v)}} = \frac{r \cdot I_1(u,v)}{\sqrt{\sum_u \sum_v (r I_1(u,v))^2}}$$

$$= \frac{I_1(u,v)}{\sqrt{\sum_u \sum_v I_1(u,v)}} = \frac{I_1(u,v)}{\|I_1\|_H} = I_1''(u,v)$$

Aufgabe 3: Korrelation

Gegeben: 3 Bildmatrizen A, B_1und B_2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

- Korrelation zwischen A und B_1
- Korrelation zwischen A und B_2
- Was ist die Korrespondenz von A?

Aufgabe 3a: Sum of Absolute Differences (SAD)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3a: Sum of Absolute Differences (SAD)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} SAD(A, B_1) &= 4 \cdot 45 = 180 \\ SAD(A, B_2) &= 90 + 45 = 135 \end{aligned}$$

⇨ B_2 ist Korrespondenz

Aufgabe 3b: Sum of Squared Differences (SSD)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3b: Sum of Squared Differences (SSD)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} SSD(A, B_1) &= 4 \cdot 45^2 = 8100 \\ SSD(A, B_2) &= 90^2 + 45^2 = 10125 \end{aligned}$$

⇨ B_1 ist Korrespondenz

Aufgabe 3c: Zero Mean Normalized Cross-Correlation (ZNCC)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3c: Zero Mean Normalized Cross-Correlation (ZNCC)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

⇨ Mittelwerte bestimmen

$$\overline{\mathrm{Img}}(u,v,n) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} \mathrm{Img}(u+i, v+j)$$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 20 \\ \overline{B_1} &= 40 \\ \overline{B_2} &= 25 \end{aligned}$$

Aufgabe 3c: Zero Mean Normalized Cross-Correlation (ZNCC)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = 20$$
$$\overline{B_1} = 40$$
$$\overline{B_2} = 25$$

Für A und B_1

$$\frac{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{\mathrm{Img}_1}(u_1,v_1,n))\cdot(\mathrm{Img}_2(u_2+i,v_2+j)-\overline{\mathrm{Img}_2}(u_2,v_2,n))}{\sqrt{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{\mathrm{Img}_1}(u_1,v_1,n))^2\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_2(u_2+i,v_2+j)-\overline{\mathrm{Img}_2}(u_2,v_2,n))^2}}$$

$$ZNCC(A,B_1) = \frac{4\cdot(25\cdot 50)+5\cdot((-20)\cdot(-40))}{\sqrt{(4\cdot 25^2+5\cdot(-20)^2)\cdot(4\cdot 50^2+5\cdot 40^2)}}$$

$$= \frac{5000+4000}{\sqrt{4500\cdot 18000}} = \frac{9000}{9000} = 1$$

Aufgabe 3c: Zero Mean Normalized Cross-Correlation (ZNCC)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 45 & 90 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= 20 \\ \overline{B_1} &= 40 \\ \overline{B_2} &= 25 \end{aligned}$$

Für A und B_2

$$\frac{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{\mathrm{Img}_1}(u_1,v_1,n))\cdot(\mathrm{Img}_2(u_2+i,v_2+j)-\overline{\mathrm{Img}_2}(u_2,v_2,n))}{\sqrt{\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_1(u_1+i,v_1+j)-\overline{\mathrm{Img}_1}(u_1,v_1,n))^2\sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}(\mathrm{Img}_2(u_2+i,v_2+j)-\overline{\mathrm{Img}_2}(u_2,v_2,n))^2}}$$

$$\begin{aligned} ZNCC(A,B_2) &= \frac{3\cdot(25\cdot 20)+(25\cdot(-25))+((-20)\cdot 65)+4\cdot((-20)\cdot(-25))}{\sqrt{(4\cdot 25^2+5\cdot(-20)^2)\cdot(3\cdot 20^2+65^2+5\cdot(-25)^2)}} \\ &= \frac{1500-625-1300+2000}{\sqrt{4500\cdot 8550}} \approx \frac{1575}{6203} \approx 0.254 \end{aligned}$$

Aufgabe 3c: Zero Mean Normalized Cross-Correlation (ZNCC)

$$
\begin{aligned}
ZNCC(A, B_1) &= \frac{4 \cdot (25 \cdot 50) + 5 \cdot ((-20) \cdot (-40))}{\sqrt{(4 \cdot 25^2 + 5 \cdot (-20)^2) \cdot (4 \cdot 50^2 + 5 \cdot 40^2)}} \\
&= \frac{5000 + 4000}{\sqrt{4500 \cdot 18000}} = \frac{9000}{9000} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ZNCC(A, B_2) &= \frac{3 \cdot (25 \cdot 20) + (25 \cdot (-25)) + ((-20) \cdot 65) + 4 \cdot ((-20) \cdot (-25))}{\sqrt{(4 \cdot 25^2 + 5 \cdot (-20)^2) \cdot (3 \cdot 20^2 + 65^2 + 5 \cdot (-25)^2)}} \\
&= \frac{1500 - 625 - 1300 + 2000}{\sqrt{4500 \cdot 8550}} \approx \frac{1575}{6203} \approx 0.254
\end{aligned}
$$

⇨ B_1 ist Korrespondenz

Antwort Onlinefrage 3: 1

Wiederholung IV: Rotationsmatrizen

Rotation um x : $$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation um y : $$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation um z : $$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4a: 3D-Transformationen

Aufgabe

- Rotationsmatrix $R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)$ für **mitgedrehte** Achsen (Euler-Winkel)
- Inverse Rotationsmatrix $R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}$

Aufgabe 4a: 3D-Transformationen

Aufgabe

- Rotationsmatrix $R_{X'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma)$ für **mitgedrehte** Achsen (Euler-Winkel)

$$
\begin{aligned}
R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) &= R_X(\alpha)\cdot R_Z(\beta)\cdot R_Y(\gamma)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c\gamma & 0 & s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\gamma & 0 & c\gamma \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta & -s\alpha \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c\gamma & 0 & s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\gamma & 0 & c\gamma \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4a: 3D-Transformationen

Aufgabe

- Inverse Rotationsmatrix $R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}$

$$R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \boxed{c\beta c\gamma} & -s\beta & c\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & \boxed{c\alpha c\beta} & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha c\beta & \boxed{s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^{-1} &= R_{X'Z'Y'}(\alpha,\beta,\gamma)^{T} \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{c\beta c\gamma} & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & \boxed{c\alpha c\beta} & s\alpha c\beta \\ c\beta s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & \boxed{s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4b: 3D-Transformationen

Aufgabe

- Rotationsmatrix $R_{YZX}(\gamma, \beta, \alpha)$ für **feste** Achsen

Aufgabe 4b: 3D-Transformationen

Aufgabe

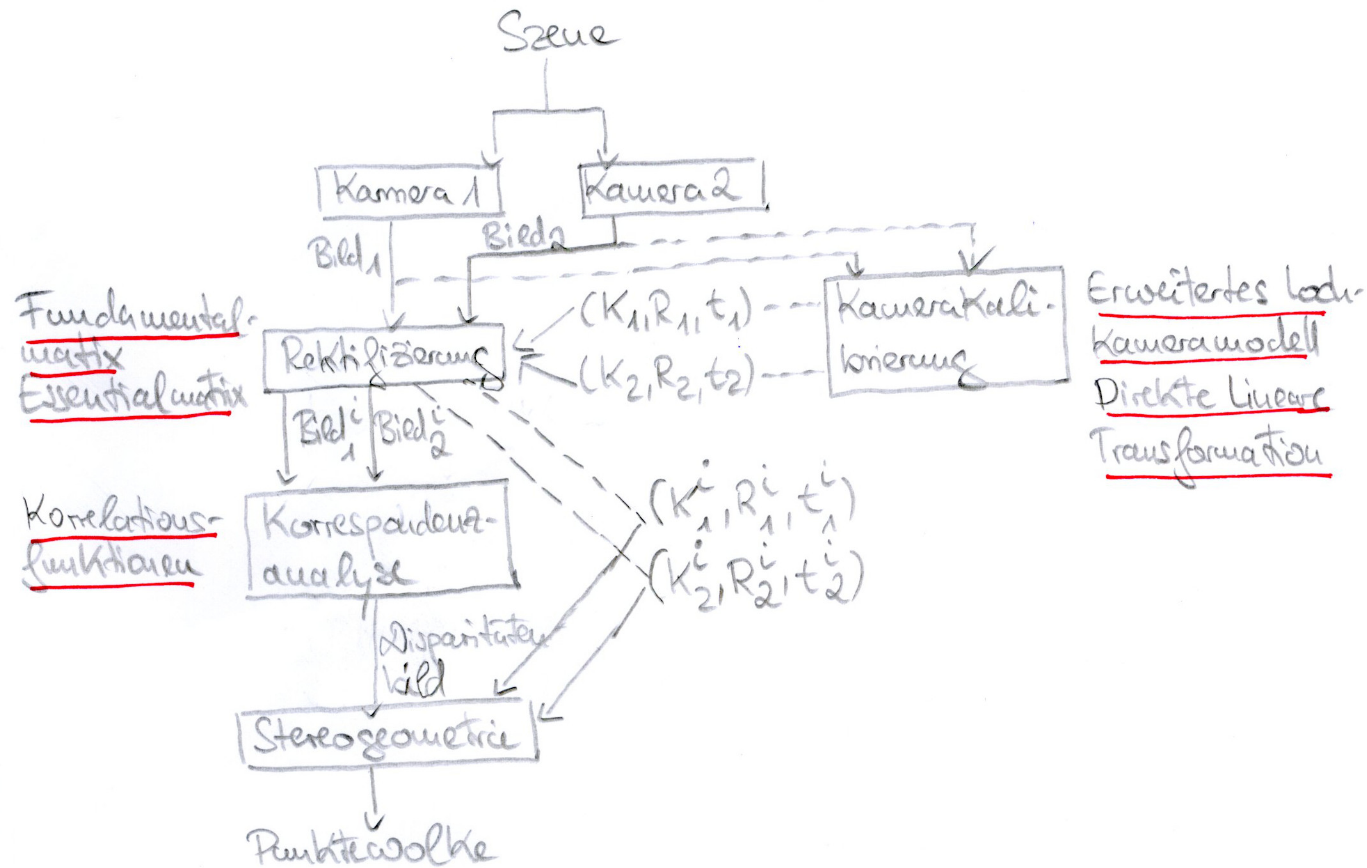
- Rotationsmatrix $R_{YZX}(\gamma, \beta, \alpha)$ für **feste** Achsen

$$R_{YZX}(\gamma, \beta, \alpha) = R_X(\alpha) \cdot R_Z(\beta) \cdot R_Y(\gamma) = R_{X'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

⇨ Siehe Aufgabe 4a)

Stereosehen-Pipeline

- Handschriftliche Herleitung in der Übung (© P. Meißner)



Aufgabe 5: Kameramodell

Gegeben

- Zwei Kameras K_1, K_2 mit den extrinsischen Parametern R_1, t_1 und R_2, t_2, die jeweils die Koordinatentransformation vom Welt- in das jeweilige Kamerakoordinatensystem definieren

Aufgabe 5a: Kameramodell

Gegeben

- Zwei Kameras K_1, K_2 mit den extrinsischen Parametern R_1, t_1 und R_2, t_2

Aufgabe

- Vektor $\overrightarrow{C_1 C_2}$ im Weltkoordinatensystem mit C_1, C_2 die jeweiligen Projektionszentren der Kameras K_1, K_2

Aufgabe 5a: Kameramodell

Gegeben

- Zwei Kameras K_1, K_2 mit den extrinsischen Parametern R_1, t_1 und R_2, t_2

Aufgabe

- Vektor $\overrightarrow{C_1 C_2}$ im Weltkoordinatensystem mit C_1, C_2 die jeweiligen Projektionszentren der Kameras K_1, K_2

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= R_1 \mathbf{x}_w + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_2 &= R_2 \mathbf{x}_w + \mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_w &= R_1^T \mathbf{x}_1 - R_1^T \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_w &= R_2^T \mathbf{x}_2 - R_2^T \mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5a: Kameramodell

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= R_1\mathbf{x}_w + \mathbf{t}_1 & \qquad \mathbf{x}_w &= R_1^T\mathbf{x}_1 - R_1^T\mathbf{t}_1 \\
\mathbf{x}_2 &= R_2\mathbf{x}_w + \mathbf{t}_2 & \qquad \mathbf{x}_w &= R_2^T\mathbf{x}_2 - R_2^T\mathbf{t}_2
\end{aligned}
$$

Die Projektionszentren der Kameras haben in ihrem eigenen Koordinatensystem den Nullvektor als Ortsvektor:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}_{1,w} &= R_1^T\mathbf{0} - R_1^T\mathbf{t}_1 = -R_1^T\mathbf{t}_1 \\
\mathbf{c}_{2,w} &= R_2^T\mathbf{0} - R_2^T\mathbf{t}_2 = -R_2^T\mathbf{t}_2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{C_1C_2}_w = \mathbf{c}_{2,w} - \mathbf{c}_{1,w} = \boxed{R_1^T\mathbf{t}_1 - R_2^T\mathbf{t}_2}$$

Antwort Onlinefrage 4

Aufgabe 5b: Kameramodell

Gegeben

- Weltkoordinatensystem ist Kamerakoordinatensystem von K_1

Aufgabe

- Neue extrinsische Parameter R'_1, t'_1 und R'_2, t'_2
- $\overrightarrow{C_1 C_2}'$ im neuen Weltkoordinatensystem

Aufgabe 5b: Kameramodell

Aufgabe

- Neue extrinsische Parameter R'_1, t'_1 und R'_2, t'_2

$$
\begin{aligned}
R'_1 &= I \\
\mathbf{t}'_1 &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5b: Kameramodell

Aufgabe

- Neue extrinsische Parameter R'_1, t'_1 und R'_2, t'_2

$$\begin{aligned} R'_1 &= I \\ \mathbf{t}'_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Gesucht: Koordinatentransformation von Kamerakoordinatensystem von K_1 zu K_2 (siehe Aufg. 5a)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_w &= R_1^T \mathbf{x}_1 - R_1^T \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_2 &= R_2 \mathbf{x}_w + \mathbf{t}_2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = R_2 R_1^T \mathbf{x}_1 - R_2 R_1^T \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

$$\begin{aligned} R'_2 &= R_2 R_1^T \\ \mathbf{t}'_2 &= \mathbf{t}_2 - R_2 R_1^T \mathbf{t}_1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5b: Kameramodell

Aufgabe

- $\overrightarrow{C_1C_2}'$ im neuen Weltkoordinatensystem

Für die Ortsvektoren der Projektionszentren im neuen Weltkoordinatensystem gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}_{1,w'} &= \mathbf{0} & R_2' &= R_2 R_1^T \\
\mathbf{c}_{2,w'} &= R_2'^T \mathbf{0} - R_2'^T \mathbf{t}_2' = -R_2'^T \mathbf{t}_2' & \mathbf{t}_2' &= \mathbf{t_2} - R_2 R_1^T \mathbf{t}_1 \\
&= -(R_2 R_1^T)^T (\mathbf{t_2} - R_2 R_1^T \mathbf{t}_1) \\
&= R_1 R_2^T (R_2 R_1^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{t_2}) \\
&= \mathbf{t}_1 - R_1 R_2^T \mathbf{t_2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \overrightarrow{C_1C_2}_{w'} = \mathbf{c}_{2,w'} - \mathbf{c}_{1,w'} = \mathbf{t}_1 - R_1 R_2^T \mathbf{t_2}
$$

Aufgabe 5c: Kameramodell

Aufgabe

- Homogene Transformationsmatrix T für eine Rotation R und eine Translation t
- Inverse Transformationsmatrix T^{-1}

Aufgabe 5c: Kameramodell

Aufgabe

- Homogene Transformationsmatrix T für eine Rotation R und eine Translation t
- Inverse Transformationsmatrix T^{-1}

$$T = \begin{pmatrix} & R & & \mathbf{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5c: Kameramodell

Aufgabe

- Homogene Transformationsmatrix T für eine Rotation R und eine Translation t
- Inverse Transformationsmatrix T^{-1}

$$T = \begin{pmatrix} & R & & \mathbf{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} & R^T & & -R^T\mathbf{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

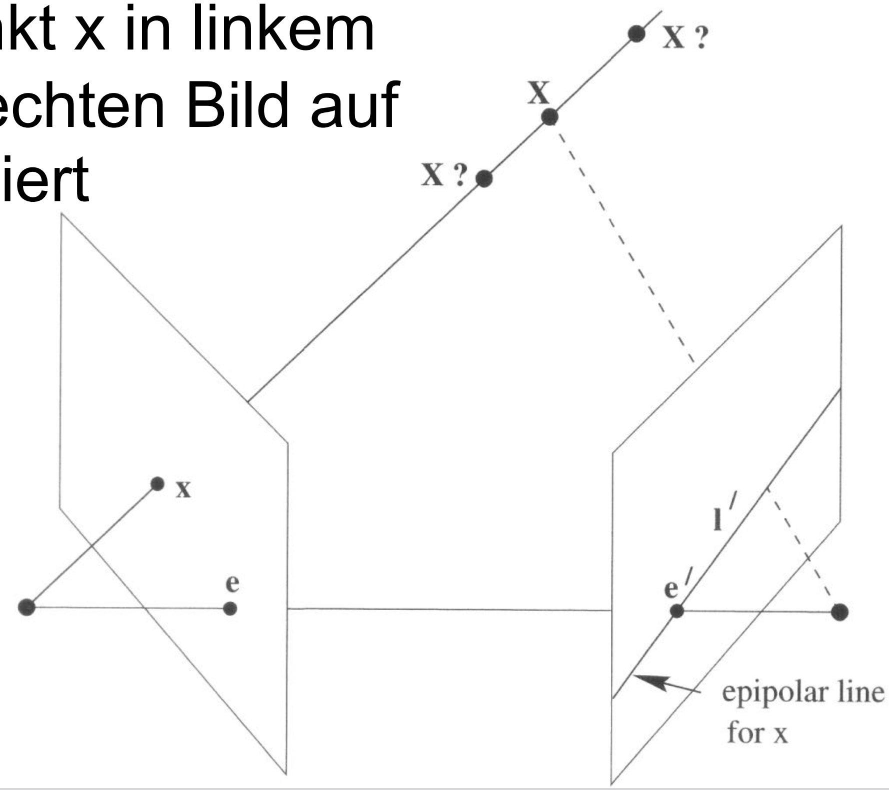
Wiederholung V: Epipolargeometrie

- Bei bekannten extrinsischen Parametern: Epipolargeometrie möglich

- Weltpunkt X, der auf Bildpunkt x in linkem Bild projiziert wird, wird im rechten Bild auf die Epipolarlinie l‘ zu x projiziert

- Stark vereinfachtes

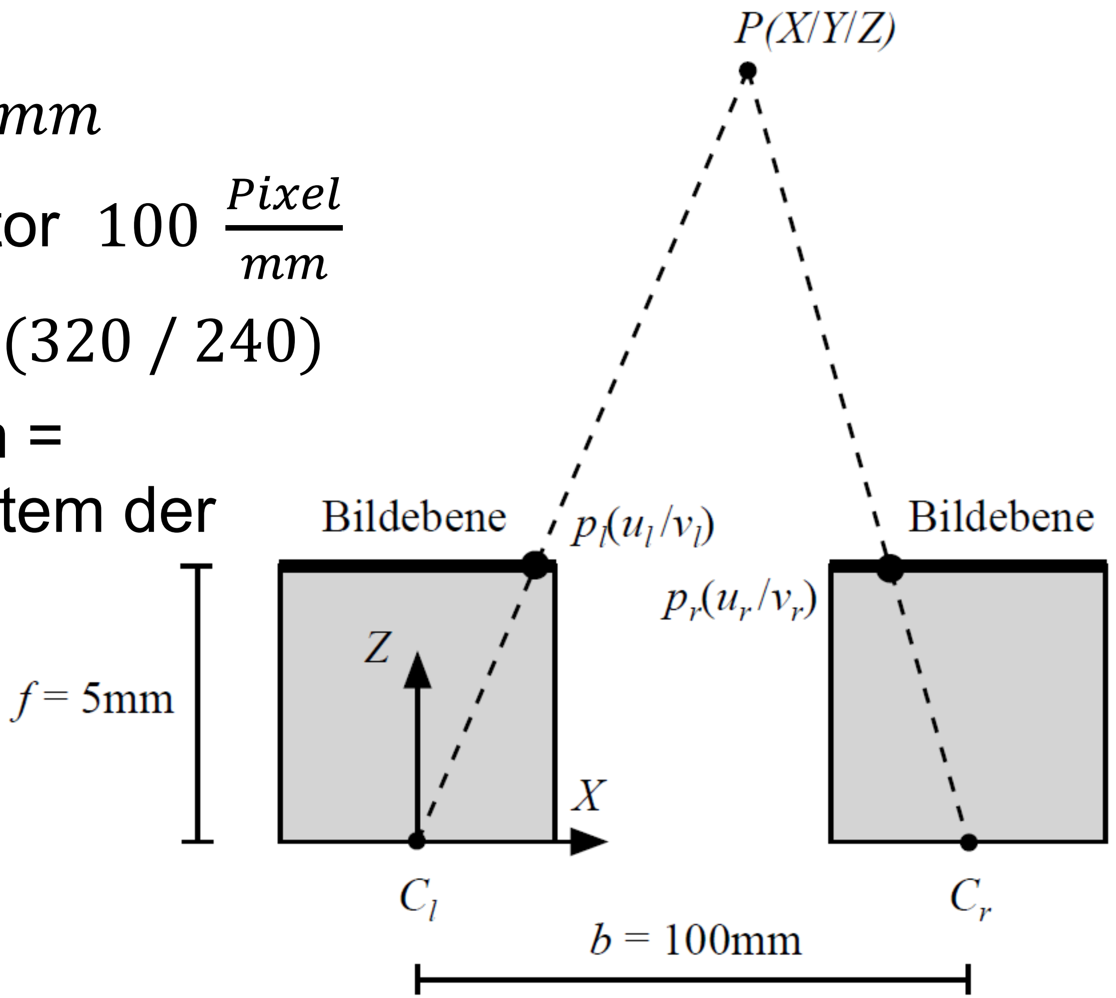
  Stereomatching



Aufgabe 6: Epipolargeometrie

Gegeben

- Brennweite $f = 5mm$
- Umrechnungsfaktor $100 \, \frac{Pixel}{mm}$
- Bildhauptpunkt $C(320 \,/\, 240)$
- Weltkoord.system = Kamerakoord.system der linken Kamera



Institut für Anthropomatik und Robotik
Prof. Dr.-Ing. R. Dillmann
Kognitive Systeme

Aufgabe 6a: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Kalibriermatrizen K_1, K_2
- Projektionsmatrizen P_1, P_2

Aufgabe 6a: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Kalibriermatrizen K_1, K_2
- Projektionsmatrizen P_1, P_2

$$100 \frac{\text{Pixel}}{\text{mm}}$$

$$f = 5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \quad f_x = f_y = 5 \text{ mm} \cdot 100 \frac{\text{Pixel}}{\text{mm}} = 500 \text{ Pixel}$$

Aufgabe 6a: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Kalibriermatrizen K_1, K_2
- Projektionsmatrizen P_1, P_2

$$100 \frac{\text{Pixel}}{\text{mm}}$$

$$f = 5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow f_x = f_y = 5 \text{ mm} \cdot 100 \frac{\text{Pixel}}{\text{mm}} = 500 \text{ Pixel}$$

Somit gilt für die Kalibriermatrizen (Einheit ist [Pixel]):

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6a: Epipolargeometrie

Für die extrinsischen Parameter gilt (Einheit [mm]):

$$
\begin{aligned}
R_1 &= I,\ \mathbf{t}_1 = \mathbf{0} \\
R_2 &= I,\ \mathbf{t}_2 = (-100\ 0\ 0)^T
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6a: Epipolargeometrie

Für die extrinsischen Parameter gilt (Einheit [mm]):

$$
\begin{aligned}
R_1 &= I,\ \mathbf{t}_1 = \mathbf{0} \\
R_2 &= I,\ \mathbf{t}_2 = (-100\ 0\ 0)^T
\end{aligned}
$$

Projektionsmatrizen:

$$P = (K\,R \mid K\,t)$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 & 0 \\ 0 & 500 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
P_2 &= \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 & -50000 \\ 0 & 500 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6b: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Essentialmatrix E, Fundamentalmatrix F
- Epipole e_1, e_2

Aufgabe 6b: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Essentialmatrix E, Fundamentalmatrix F
- Epipole e_1, e_2

$$R_2 = I, \; \mathbf{t}_2 = (-100\ 0\ 0)^T$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & -100 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6b: Epipolargeometrie

Für die Fundamentalmatrix: Berechnung von $K_1^{-1} = K_2^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 500 & 0 & 320 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 240 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 500 & 0 & 0 & 1 & 0 & -320 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 1 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & -0.64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.002 & -0.48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow K_1^{-1} = K_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 & -0.64 \\ 0 & 0.002 & -0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6b: Epipolargeometrie

Berechnung der Fundamentalmatrix

$$
\begin{aligned}
F &= K_2^{-T} E K_1^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ -0.64 & -0.48 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & -100 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.002 & 0 & -0.64 \\ 0 & 0.002 & -0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -100 & -48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.002 & 0 & -0.64 \\ 0 & 0.002 & -0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6b: Epipolargeometrie

Berechnung der Epipole:

$$\mathbf{e}_1 = -K_1 R_2^T \mathbf{t}_2 = -\begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = K_2 \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Division durch die w-Komponente des Ergebnisses bedeutet Division durch Null.

→ Epipole liegen im Unendlichen auf der u-Achse, alle Epipolarlinien verlaufen horizontal

Aufgabe 6c: Epipolargeometrie

Aufgabe

- Epipolarlinie l_2 (im Bild der rechten Kamera) zum Bildpunkt $P_1(200\ /\ 200)$ der linken Kamera

$$\mathbf{l}_2 = F \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ -40 \end{pmatrix}}$$

Antwort Onlinefrage 5

Nächste Vorlesung:

Montag, 22.07.2019

Robotik 2

Kognitive Systeme

Übung 6

Wissensrepräsentation

Planung

Quaternionen

Institut für Anthropomatik und Robotik

Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1

Resolution und DPLL

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.a

- Geben Sie die Konjunktive Normalform folgender Sätze an. Erstellen Sie hierfür zuerst eine Wahrheitstabelle.

$$(i)\ \alpha = \neg A \vee (B \wedge C)$$
$$(ii)\ \beta = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$$
$$(iii)\ \gamma = (A \wedge B) \vee \neg C$$

α	β	γ	A	B	C

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

Karlsruher Institut für Technologie

(i) $\alpha = \neg A \vee (B \wedge C)$

α	β	γ	A	B	C
			0	0	0
			0	0	1
			0	1	0
			0	1	1
			1	0	0
			1	0	1
			1	1	0
			1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(i) $\alpha = \boxed{\neg A} \vee (B \wedge C)$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1			0	0	1
1			0	1	0
1			0	1	1
			1	0	0
			1	0	1
			1	1	0
			1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(i) $\alpha = \neg A \vee (\boxed{B \wedge C})$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1			0	0	1
1			0	1	0
1			0	1	1
			1	0	0
			1	0	1
			1	1	0
1			1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(i) $\alpha = \neg A \vee (\boxed{B \wedge C})$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1			0	0	1
1			0	1	0
1			0	1	1
0			1	0	0
0			1	0	1
0			1	1	0
1			1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(ii) $\beta = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1			0	0	1
1			0	1	0
1			0	1	1
0			1	0	0
0			1	0	1
0			1	1	0
1			1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(ii) $\beta = (\boxed{A \wedge B}) \vee (\neg A \wedge C)$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1			0	0	1
1			0	1	0
1			0	1	1
0			1	0	0
0			1	0	1
0	1		1	1	0
1	1		1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(ii) $\beta = (A \wedge B) \vee (\boxed{\neg A \wedge C})$

α	β	γ	A	B	C
1			0	0	0
1	1		0	0	1
1			0	1	0
1	1		0	1	1
0			1	0	0
0			1	0	1
0	1		1	1	0
1	1		1	1	1

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

$$\text{(ii)}\ \beta = (A \wedge B) \vee (\boxed{\neg A \wedge C})$$

α	β	γ	A	B	C
1	0		0	0	0
1	1		0	0	1
1	0		0	1	0
1	1		0	1	1
0	0		1	0	0
0	0		1	0	1
0	1		1	1	0
1	1		1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

$$\text{(iii) } \gamma = (A \wedge B) \vee \neg C$$

α	β	γ	A	B	C
1	0		0	0	0
1	1		0	0	1
1	0		0	1	0
1	1		0	1	1
0	0		1	0	0
0	0		1	0	1
0	1		1	1	0
1	1		1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(iii) $\gamma = (\boxed{A \wedge B}) \vee \neg C$

α	β	γ	A	B	C
1	0		0	0	0
1	1		0	0	1
1	0		0	1	0
1	1		0	1	1
0	0		1	0	0
0	0		1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(iii) $\gamma = (A \wedge B) \vee \boxed{\neg C}$

α	β	γ	A	B	C
1	0	1	0	0	0
1	1		0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1		0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0		1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.a - Wahrheitstabelle

(iii) $\gamma = (A \wedge B) \vee \boxed{\neg C}$

α	β	γ	A	B	C
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.a – Konjunktive Normalform

- Konjunktive Verknüpfung aller Zeilen mit Gesamtwahrheitswert FALSE
- KNF-Schema: (a ∨ b ∨ c) ∧ (d ∨ e ∨ f) ∧ … ∧(x ∨ y ∨ z)

(i) $\alpha = \neg A \vee (B \wedge C)$

$\alpha_{KF} = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

α	β	γ	A	B	C
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.a – Konjunktive Normalform

- Konjunktive Verknüpfung aller Zeilen mit Gesamtwahrheitswert FALSE
- KNF-Schema: (a ∨ b ∨ c) ∧ (d ∨ e ∨ f) ∧ … ∧(x ∨ y ∨ z)

(ii) $\beta = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$

$$\beta_{KF} = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

α	β	γ	A	B	C
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.a – Konjunktive Normalform

- Konjunktive Verknüpfung aller Zeilen mit Gesamtwahrheitswert FALSE
- KNF-Schema: (a ∨ b ∨ c) ∧ (d ∨ e ∨ f) ∧ … ∧(x ∨ y ∨ z)

(iii) $\gamma = (A \wedge B) \vee \neg C$

$$\gamma_{KF} = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

α	β	γ	A	B	C
1	0	1	0	0	0
1	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
1	0	1	0	1	0
1	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	0	1	1	0	0
0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 6.1.b

- Gegeben sei folgende Klauselmenge:

$$(\neg A \vee B), (A \vee \neg B \vee C), (B \vee \neg C), (\neg B)$$

- Leiten Sie folgende Aussagen (falls möglich) durch Widerspruchsbeweis ab.

$$\text{(i) } \neg C, \qquad \text{(ii) } A, \qquad \text{(iii) } \neg B.$$

(i) $\boxed{\neg A \vee B}$ $\boxed{A \vee \neg B \vee C}$ $\boxed{B \vee \neg C}$ $\boxed{\neg B}$ $\boxed{C}$

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.b

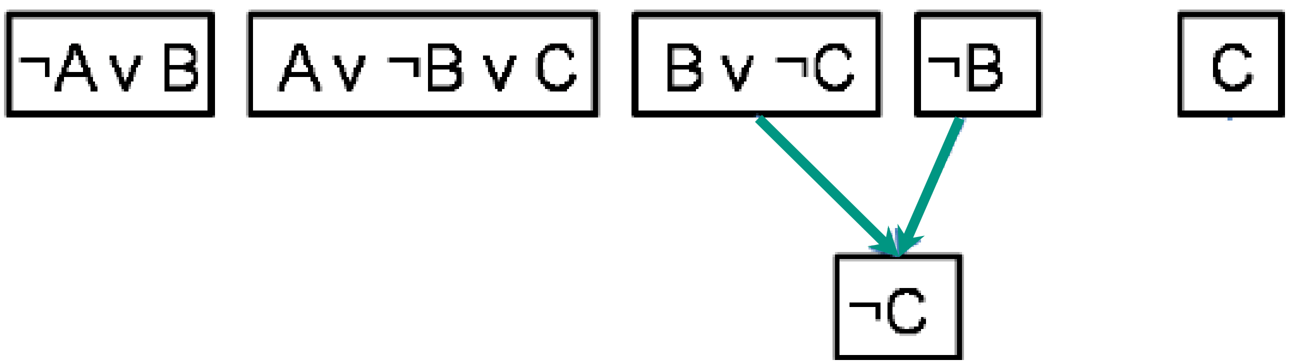
- Gegeben sei folgende Klauselmenge:

$$(\neg A \vee B), (A \vee \neg B \vee C), (B \vee \neg C), (\neg B)$$

- Leiten Sie folgende Aussagen (falls möglich) durch Widerspruchsbeweis ab.

$$\text{(i) } \neg C, \qquad \text{(ii) } A, \qquad \text{(iii) } \neg B.$$

(i)



Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.b

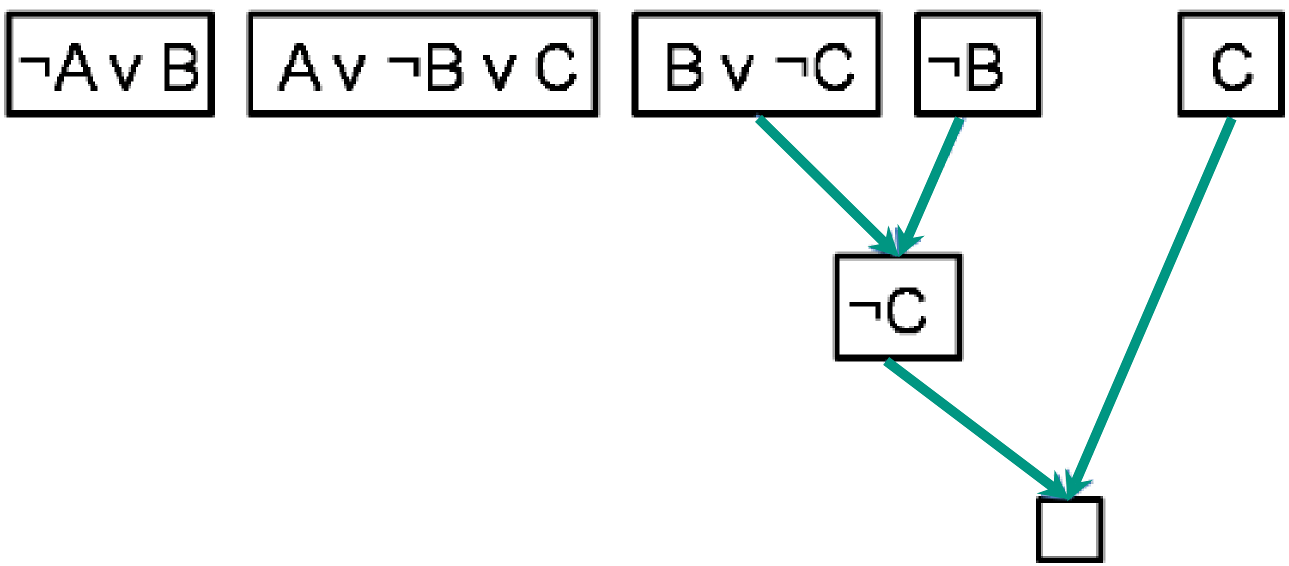
- Gegeben sei folgende Klauselmenge:

$$(\neg A \vee B), (A \vee \neg B \vee C), (B \vee \neg C), (\neg B)$$

- Leiten Sie folgende Aussagen (falls möglich) durch Widerspruchsbeweis ab.

$$\text{(i) } \neg C, \qquad \text{(ii) } A, \qquad \text{(iii) } \neg B.$$

(i)



Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

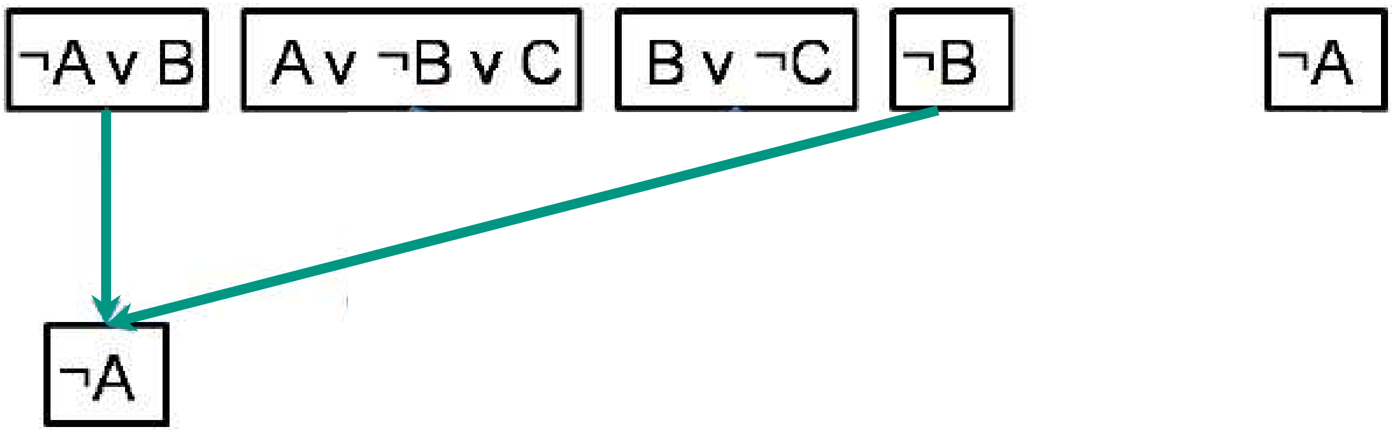
(ii) $\boxed{\neg A \vee B}$ $\boxed{A \vee \neg B \vee C}$ $\boxed{B \vee \neg C}$ $\boxed{\neg B}$ $\boxed{\neg A}$

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

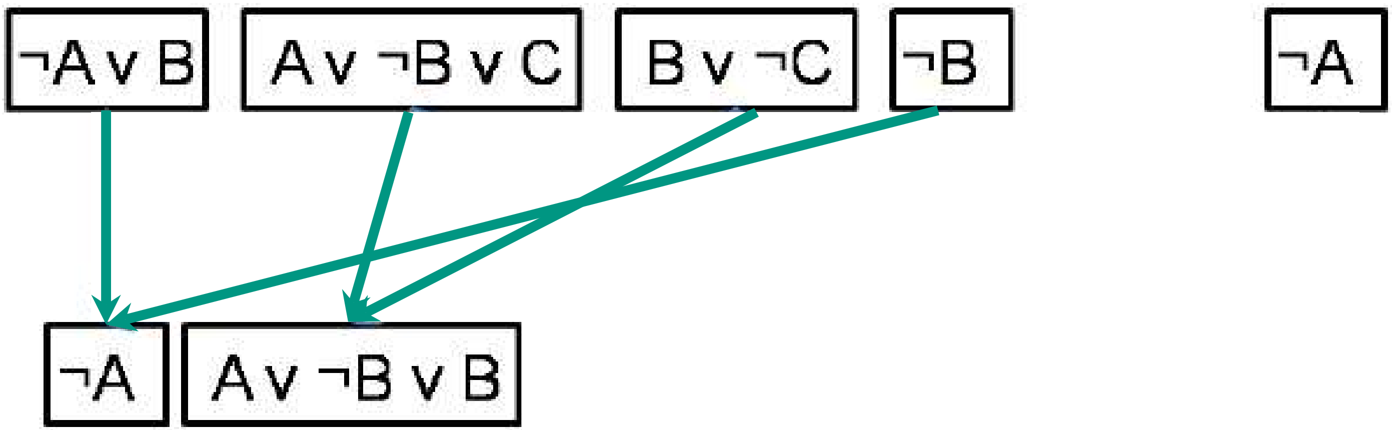
(ii)



Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$,   (ii) A,   (iii) $\neg B$.

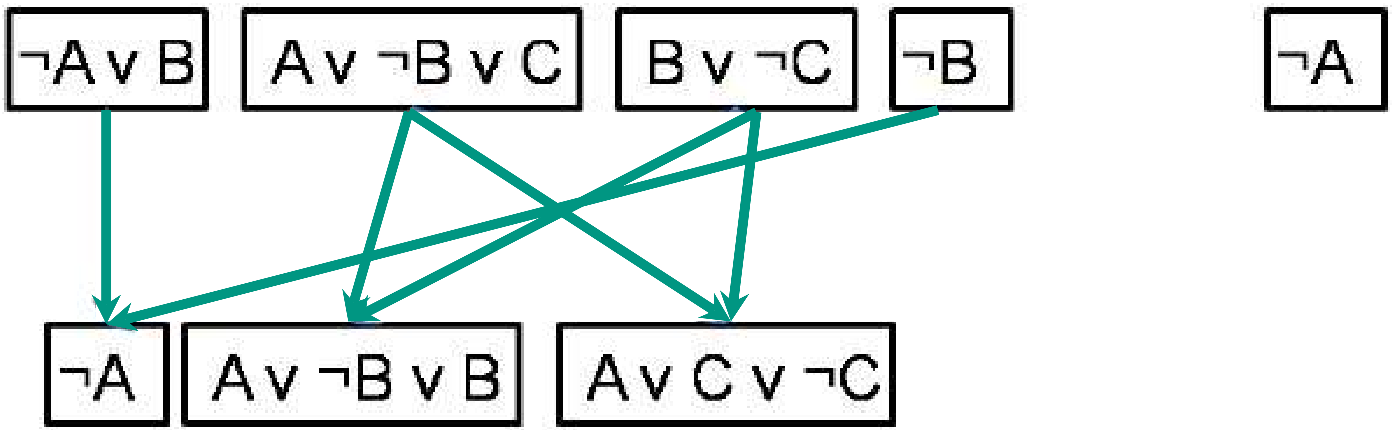
(ii)



Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

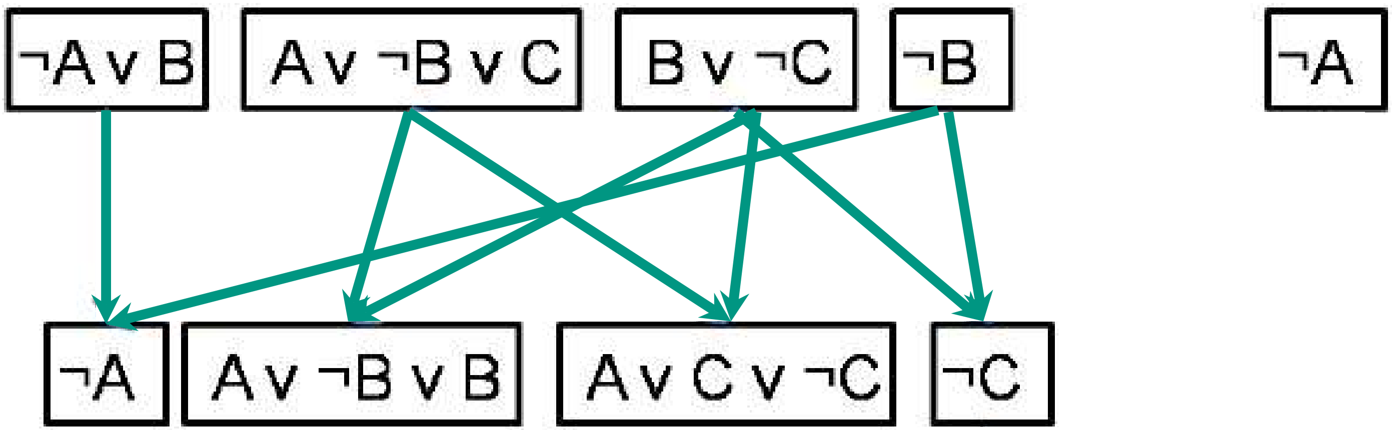
(ii)



Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

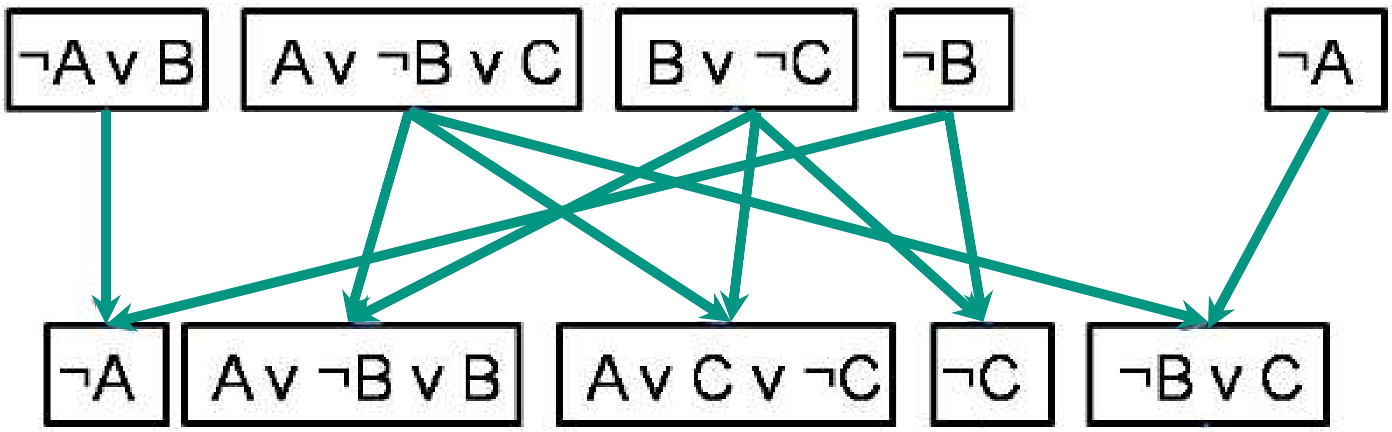
(ii)



Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

(ii)

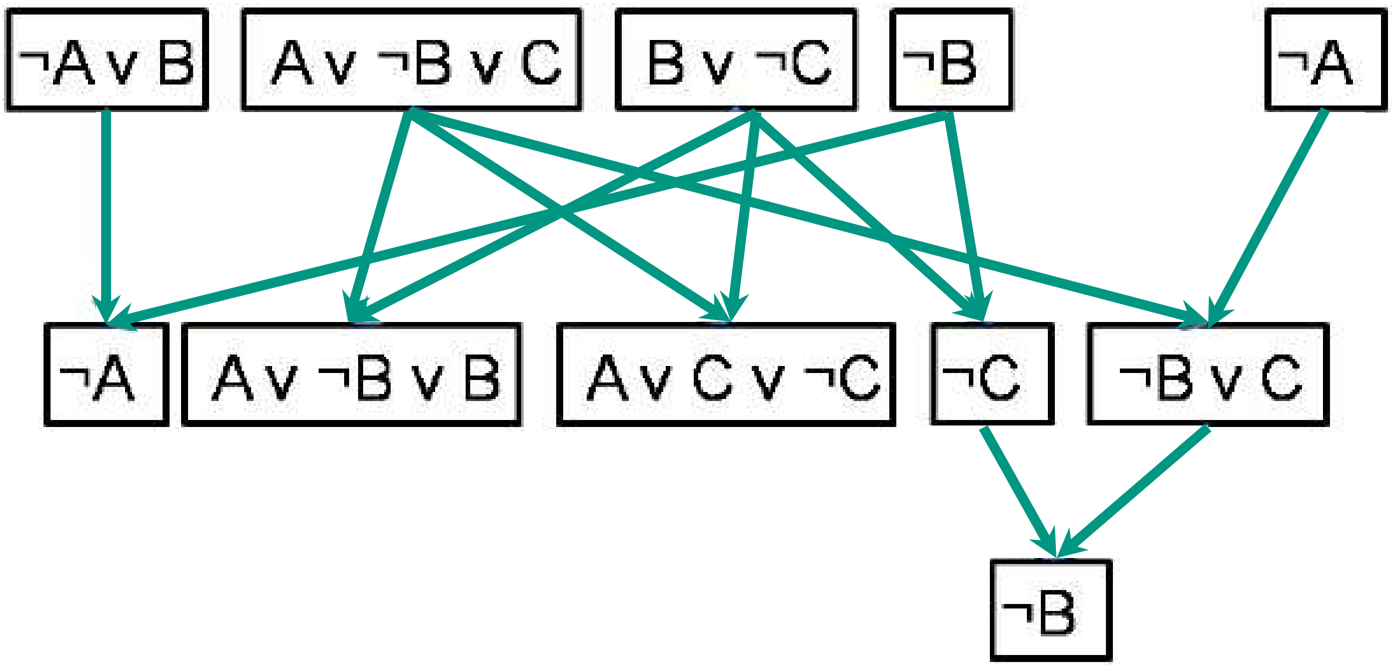


Aufgabe 6.1.b

Karlsruher Institut für Technologie

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

(ii)



Aufgabe 6.1.b

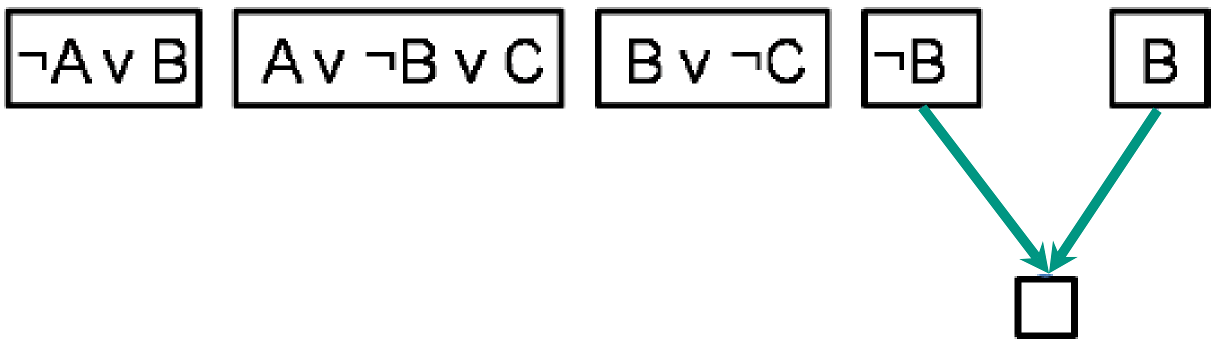
(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

(iii) $\boxed{\neg A \vee B}$ $\boxed{A \vee \neg B \vee C}$ $\boxed{B \vee \neg C}$ $\boxed{\neg B}$ $\boxed{B}$

Aufgabe 6.1.b

(i) $\neg C$, (ii) A, (iii) $\neg B$.

(iii)



Onlinefrage Nr. 1:

A kann nicht abgeleitet werden.

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.c - DPLL

- Zeigen Sie mit Hilfe des DPLL-Verfahrens, dass folgende Klauselmenge S erfüllbar ist:

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg A & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & A & &
\end{array}$$

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$
\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & \cancel{A} & &
\end{array}
$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$\begin{array}{ccccc} B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\ \neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\ \neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\ \neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\ B & \vee & E & \vee & C \\ & & \cancel{A} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B & \vee & \neg C & & \\ \neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\ \neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\ \neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\ B & \vee & E & \vee & C \end{array}$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

Karlsruher Institut für Technologie

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & \cancel{A} & &
\end{array}$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \\
\cancel{\neg E} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{B} \\
B & \vee & E & \vee & C
\end{array}$$

D ist rein, **D = FALSE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & \cancel{A} & &
\end{array}$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
B & \vee & E & \vee & C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \\
\cancel{\neg E} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{B} \\
B & \vee & E & \vee & C
\end{array}$$

D ist rein, **D = FALSE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$
\begin{array}{l}
B \lor \cancel{\neg A} \lor \neg C \\
\neg C \lor \neg B \lor E \\
\neg D \lor \neg B \lor C \\
\neg E \lor \neg D \lor B \\
B \lor E \lor C \\
\cancel{A}
\end{array}
$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$
\begin{array}{l}
B \lor \neg C \\
\neg C \lor \neg B \lor E \\
\cancel{\neg D \lor \neg B \lor C} \\
\cancel{\neg E \lor \neg D \lor B} \\
B \lor E \lor C
\end{array}
$$

D ist rein, **D = FALSE**

$$
\begin{array}{l}
B \lor \neg C \\
\cancel{\neg C \lor \neg B \lor E} \\
\cancel{B \lor E \lor C}
\end{array}
$$

E ist rein, **E = TRUE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & \cancel{A} & &
\end{array}$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \\
\cancel{\neg E} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{B} \\
B & \vee & E & \vee & C
\end{array}$$

D ist rein, **D = FALSE**

$$\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\cancel{\neg C} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} \\
\cancel{B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} & \cancel{\vee} & \cancel{C}
\end{array}$$

E ist rein, **E = TRUE**

$$B \vee \neg C$$

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$
\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\
\neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\
B & \vee & E & \vee & C \\
 & & \cancel{A} & &
\end{array}
$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$
\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\
\cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \\
\cancel{\neg E} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{B} \\
B & \vee & E & \vee & C
\end{array}
$$

D ist rein, **D = FALSE**

$$
\begin{array}{ccccc}
B & \vee & \neg C & & \\
\cancel{\neg C} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} \\
\cancel{B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} & \cancel{\vee} & \cancel{C}
\end{array}
$$

E ist rein, **E = TRUE**

$$
\begin{array}{ccc}
B & \vee & \neg C
\end{array}
$$

B ist rein, **B = TRUE**
oder
C ist rein, **C = FALSE**

Aufgabe 6.1.c - DPLL

$$\begin{array}{ccccc} B & \vee & \cancel{\neg A} & \vee & \neg C \\ \neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\ \neg D & \vee & \neg B & \vee & C \\ \neg E & \vee & \neg D & \vee & B \\ B & \vee & E & \vee & C \\ & & \cancel{A} & & \end{array}$$

A ist Einheitsklausel, **A = TRUE**

$$\begin{array}{ccccc} B & \vee & \neg C & & \\ \neg C & \vee & \neg B & \vee & E \\ \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \\ \cancel{\neg E} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg D} & \cancel{\vee} & \cancel{B} \\ B & \vee & E & \vee & C \end{array}$$

D ist rein, **D = FALSE**

$$\begin{array}{ccccc} B & \vee & \neg C & & \\ \cancel{\neg C} & \cancel{\vee} & \cancel{\neg B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} \\ \cancel{B} & \cancel{\vee} & \cancel{E} & \cancel{\vee} & \cancel{C} \end{array}$$

E ist rein, **E = TRUE**

$$B \quad \vee \quad \neg C$$

B ist rein, **B = TRUE**
oder
C ist rein, **C = FALSE**

Onlinefrage Nr. 2:

Es existiert sowohl für **C = TRUE** als auch **C = FALSE** ein Modell, das S erfüllt, und das vom DPLL-Algorithmus gefunden wird.

Aufgabe 6.2

STRIPS & ADL

Aufgabe 6.2.a - STRIPS

- **Aktionen**

  Load – Beladen eines Flugzeuges

  Unload – Entladen eines Flugzeuges

  Fly – Fliegen von einem Flughafen zum anderen

- **Prädikate**

  In(c,p) – Fracht c befindet sich in Flugzeug p

  At(x,a) – Fracht/Flugzeug x befindet sich am Flughafen a

- **Aufgabe**: Definieren Sie die Aktionen *Load*, *Unload* und *Fly* durch die Liste der Parameter, Vorbedingung und Effekt in STRIPS.

Aufgabe 6.2.a - STRIPS

Aktion (Load(c, p, a),
Vorbed.: $At(c, a) \wedge At(p, a) \wedge Fracht(c) \wedge Flugzeug(p) \wedge Flughafen(a)$
Effekt: $\neg At(c, a) \wedge In(c, p)$)

Aktion (Unload(c, p, a),
Vorbed.: $In(c, p) \wedge At(p, a) \wedge Fracht(c) \wedge Flugzeug(p) \wedge Flughafen(a)$
Effekt: $At(c, a) \wedge \neg In(c, p)$)

Aktion (Fly(p, from, to),
Vorbed.: $At(p, from) \wedge Flugzeug(p) \wedge Flughafen(from) \wedge Flughafen(to)$
Effekt: $\neg At(p, from) \wedge At(p, to)$)

Beachte:
- Vorbedingung = Konjunktion positiver Literale
- Effekt = Konjunktion positiver oder negativer Literale

Aufgabe 6.2.b - STRIPS

- Die Fracht C_1 und das Flugzeug P_1 befinden sich am Flughafen Frankfurt (FRA) und soll nach New York (JFK) transportiert und abgeladen werden. Dort soll die Fracht C_2 aufgeladen, nach Frankfurt transportiert und dort abgeladen werden. Geben Sie Initialzustand und Zielzustand des Planungsproblems in STRIPS an.

Init (At(C_1, FRA) ∧ At(C_2, JFK) ∧ At(P_1, FRA) ∧ Fracht(C_1) ∧ Fracht(C_2)∧ Flugzeug(P_1) ∧ Flughafen(FRA) ∧ Flughafen(JFK))

Ziel (At(C_1, JFK) ∧ At(C_2, FRA))

- Geben Sie eine Folge von Aktionen mit Parametern in STRIPS an, welche das genannte Problem löst.

[Load(C_1, P_1, FRA), Fly(P_1, FRA, JFK), Unload(C_1, P_1, JFK), Load(C_2, P_1, JFK), Fly(P_1, JFK, FRA), Unload(C_2, P_1, FRA)]

Aufgabe 6.2.c - ADL

- Die Fracht C_1 und das Flugzeug P_1 befinden am Flughafen Frankfurt (FRA). Am Flughafen New York (JFK) befindet sich die Fracht C_2 .
- Ziel soll sein, dass sich beide Frachtstücke am gleichen Flughafen befinden. Geben Sie Initialzustand und Zielzustand des Planungsproblems in der Planungssprache ADL an.

Init $(At(C_1, FRA) \wedge At(C_2, JFK) \wedge At(P_1, FRA) \wedge Fracht(C_1) \wedge Fracht(C_2) \wedge Flugzeug(P_1) \wedge Flughafen(FRA) \wedge Flughafen(JFK))$

Ziel $((\exists\, x\ At(C_1, x) \wedge At(C_2, x))$

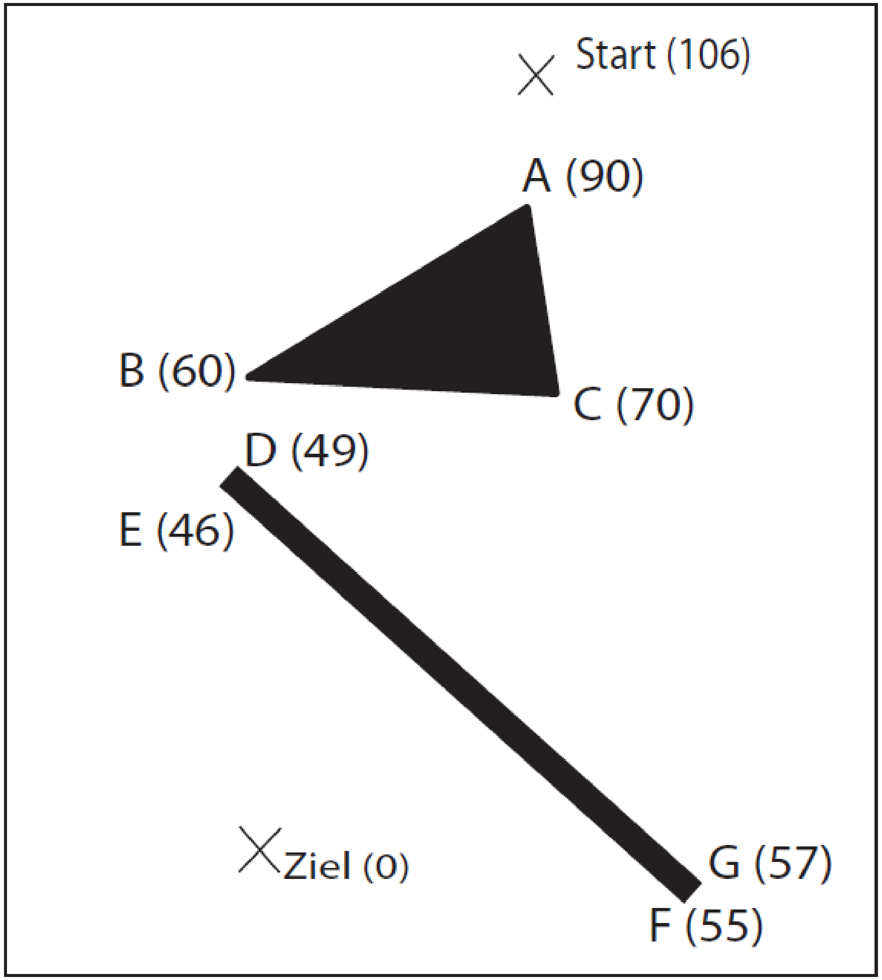
- Geben Sie eine Folge von Aktionen mit Parametern in ADL an, welche das oben beschriebene Problem löst.

$[Load(C_1, P_1, FRA), Fly(P_1, FRA, JFK), Unload(C_1, P_1, JFK)]$

Aufgabe 6.4

Bahnplanung

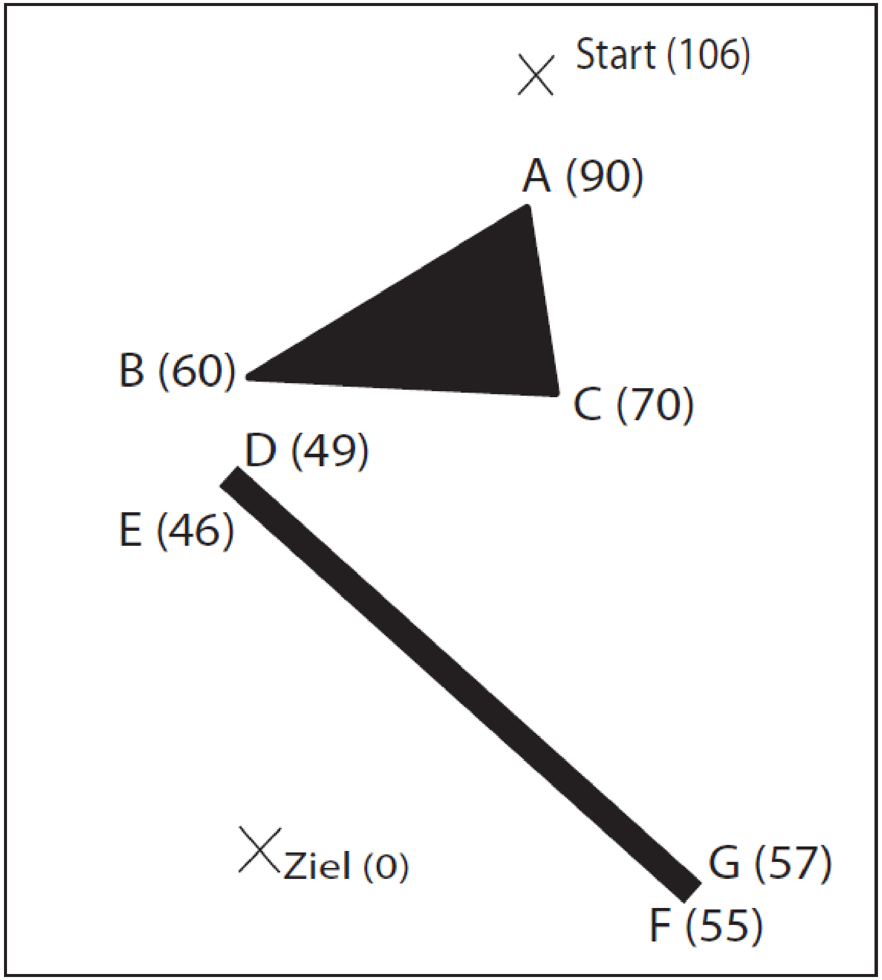
Aufgabe 6.4 - Bahnplanung



Gegeben

- Hinderniskonstellation mit einem punktförmigen mobilen Roboter am Startpunkt
- Eckpunkte mit Distanzen zum Zielpunkt

Aufgabe 6.4.a - Bahnplanung

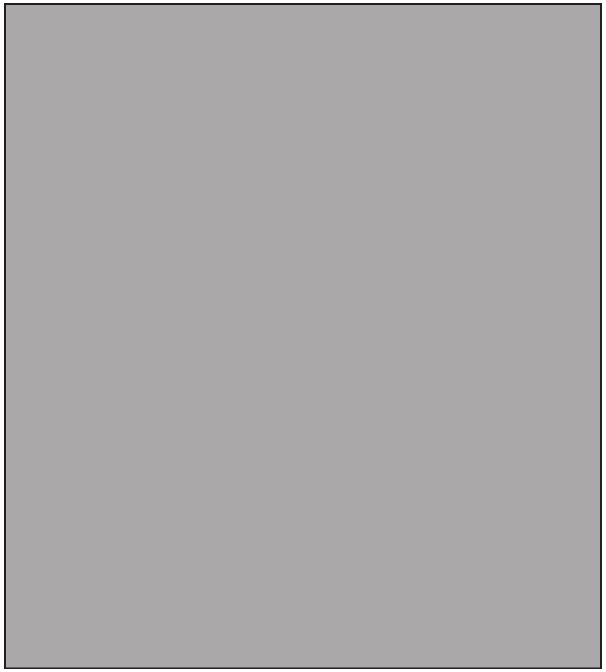


Gesucht

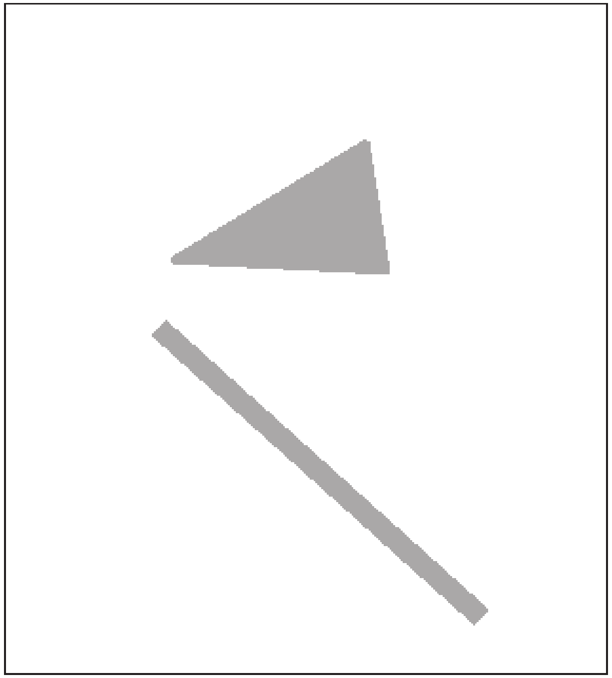
- Konfigurationsraum?
- Hindernisraum?
- Freiraum?

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

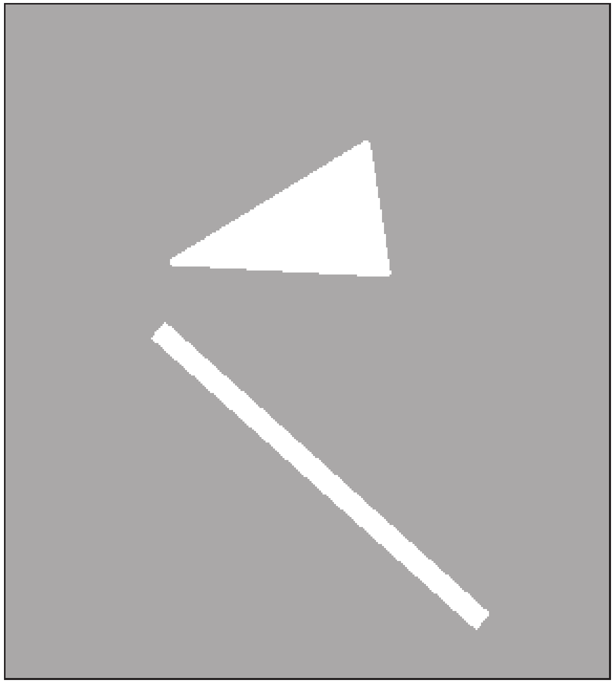
Aufgabe 6.4.a - Bahnplanung



Konfigurationsraum



Hindernisraum

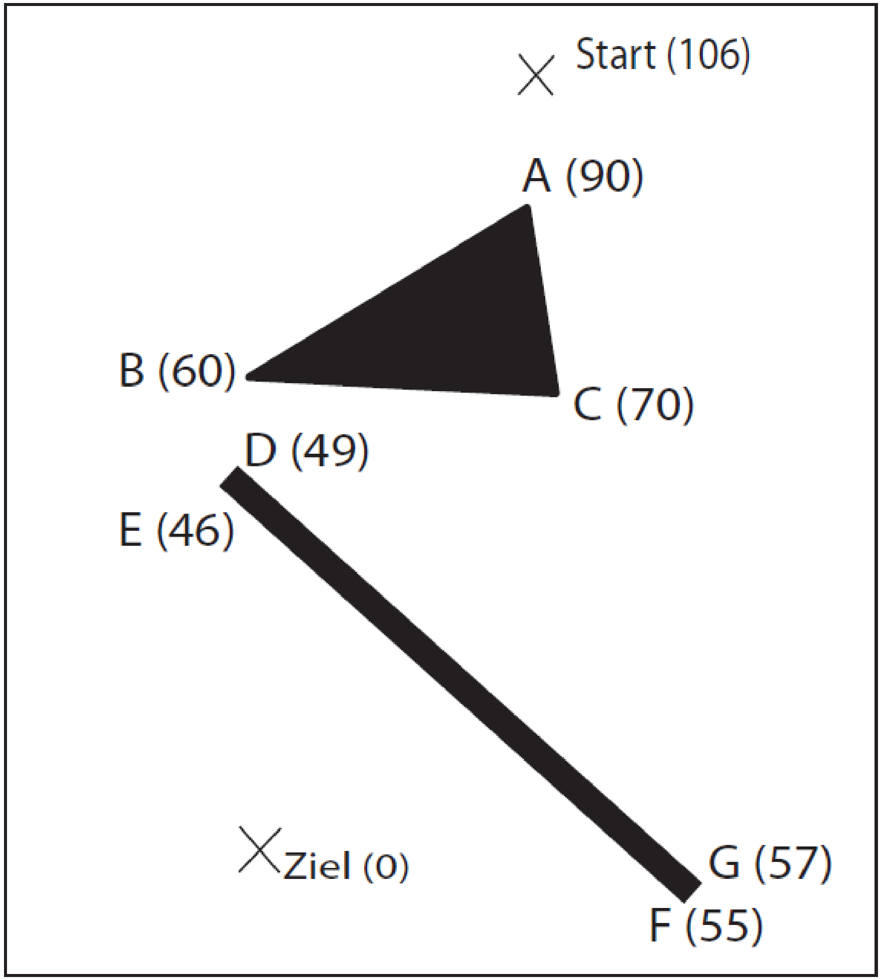


Freiraum

Roboter als Punkt darstellen

- Erweitere Hindernisse um Roboterradius d/2
- Berechne damit Frei- und Hindernisraum neu

Aufgabe 6.4.b - Bahnplanung

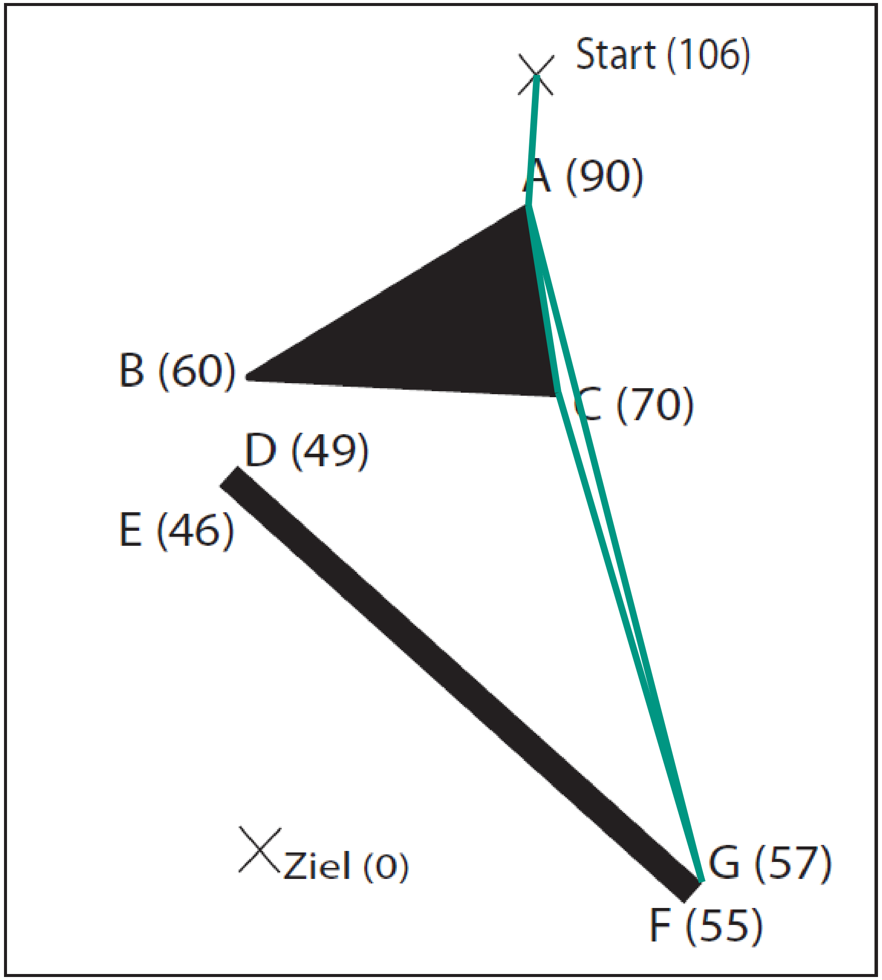


Gesucht

- Sichtgraph?

- Sichtverbindungen zwischen Ecken der Hindernisse
- Auch Ränder sind Verbindungen zwischen den Ecken
- Verbindungen aller sichtbaren Eckpunkte der Hindernisse mit Start- und Zielpunkt

Aufgabe 6.4.b - Bahnplanung



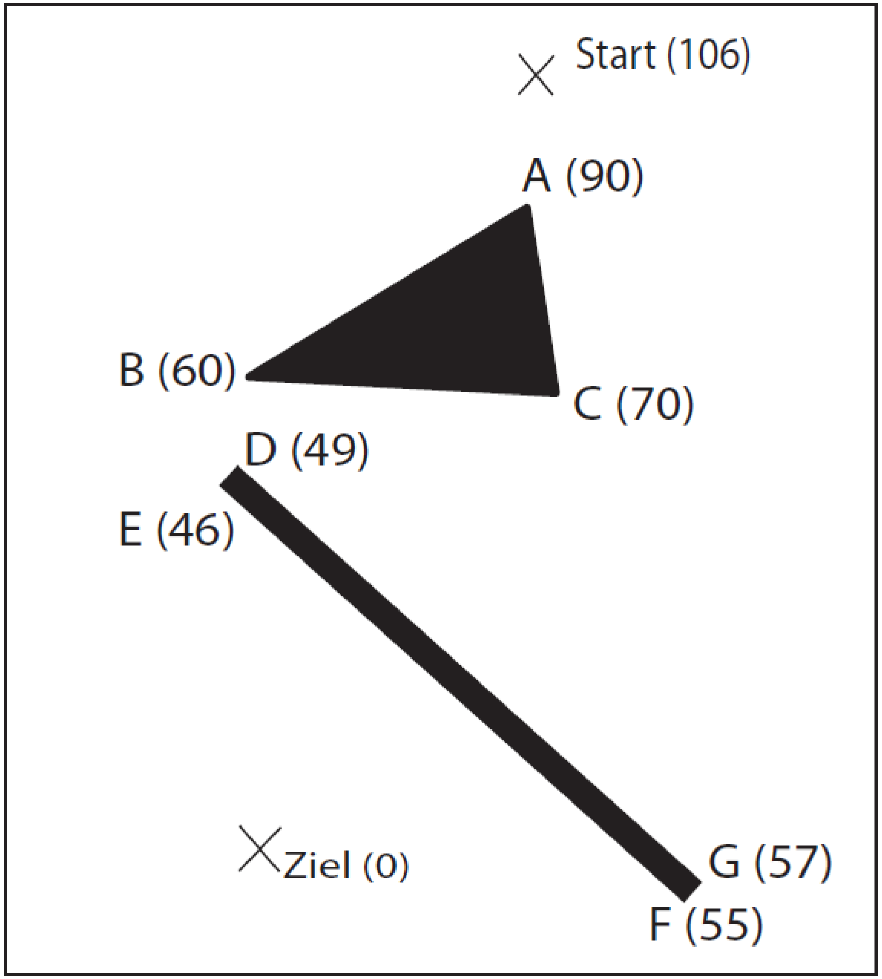
Gesucht

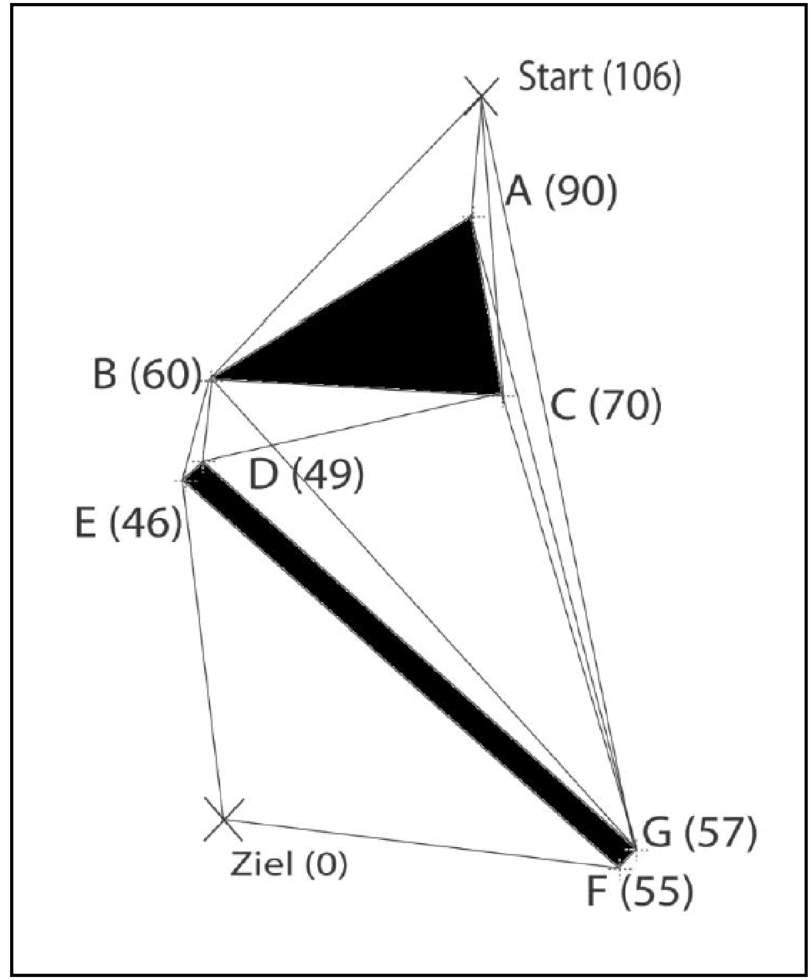
- Sichtgraph?

- Sichtverbindungen zwischen Ecken der Hindernisse
- Auch Ränder sind Verbindungen zwischen den Ecken
- Verbindungen aller sichtbaren Eckpunkte der Hindernisse mit Start- und Zielpunkt

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Aufgabe 6.4.b - Bahnplanung

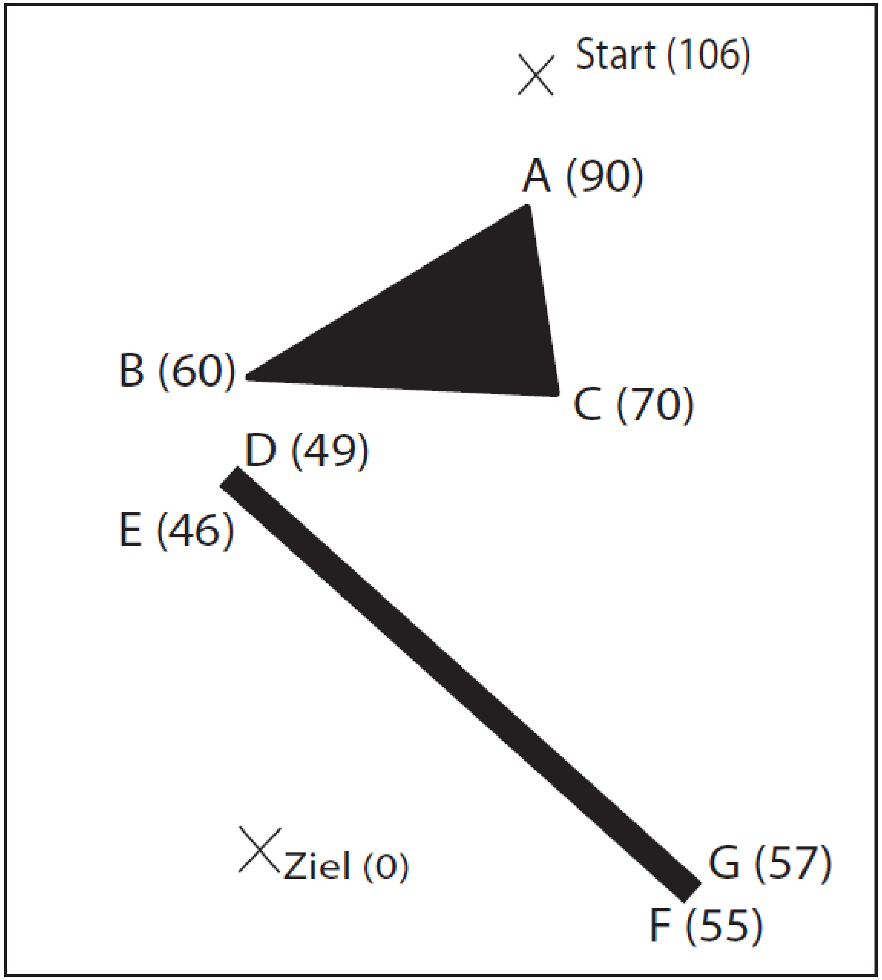




Onlinefrage Nr. 3:

Der Sichtgraph besitzt 19 Kanten.

Aufgabe 6.4.c - Bahnplanung

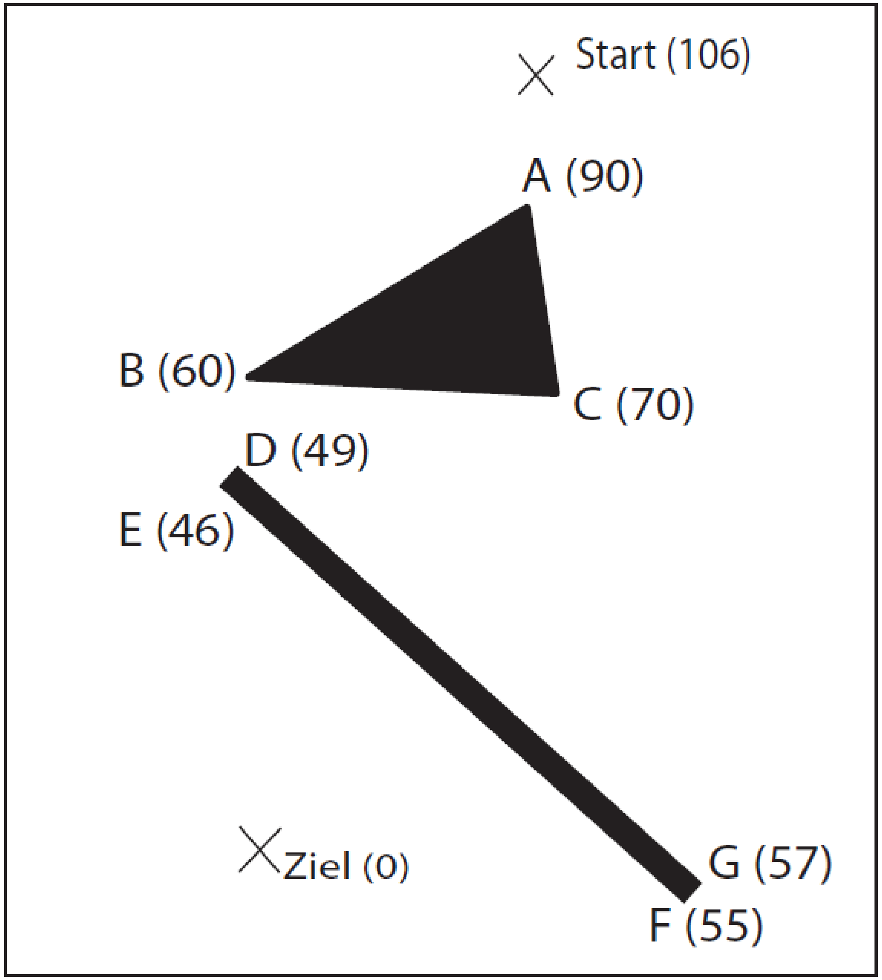


Distanzen zwischen den Punkten

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

$g(n)$: Kosten vom Startknoten zum Knoten n.
$h(n)$: Kosten des direkten Weges vom Knoten n zum Zielknoten.

Aufgabe 6.4.c - Bahnplanung



Distanzen zwischen den Punkten

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

1. Der Planer expandiert jeweils den Knoten n, bei dem die Evaluationsfunktion h(n) minimal ist.

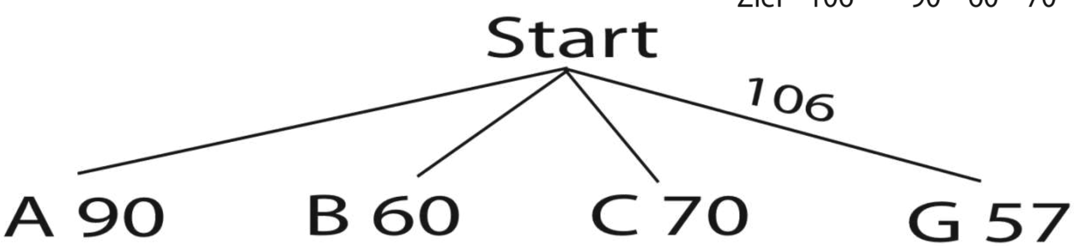
→ Greedy-Algorithmus

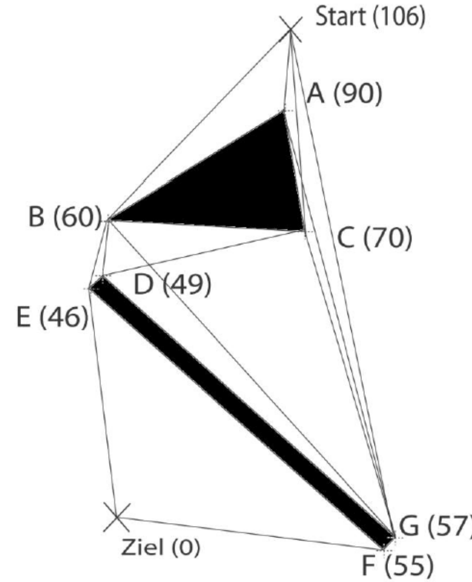
Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

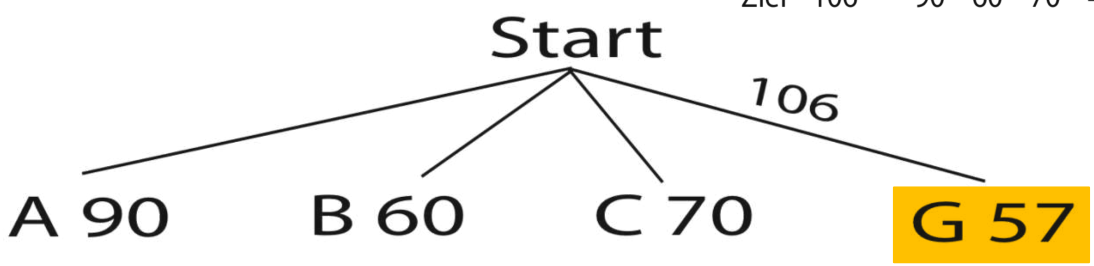


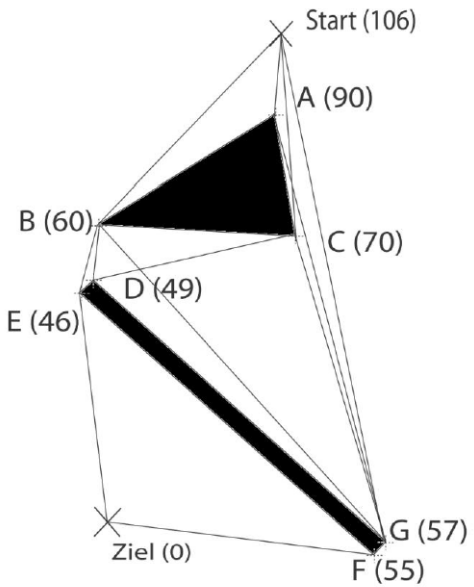


106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0



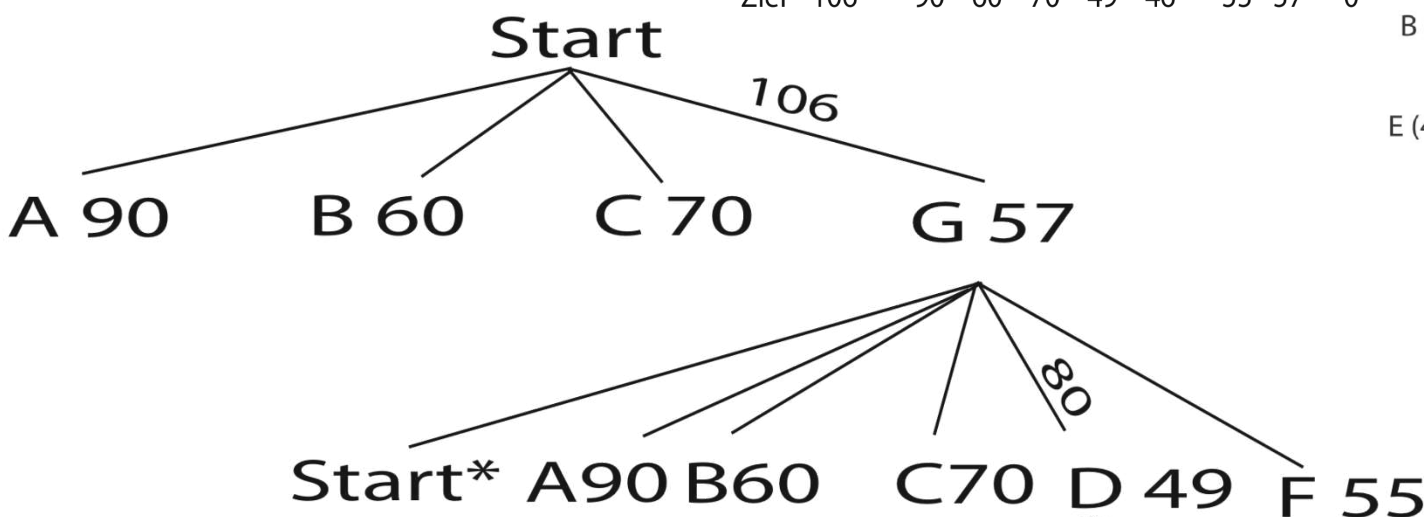


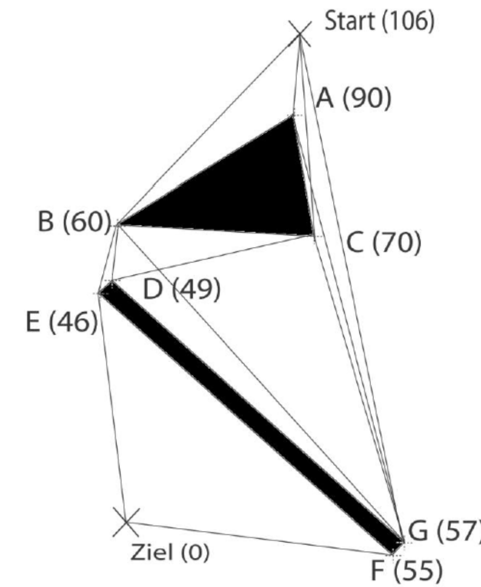
Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

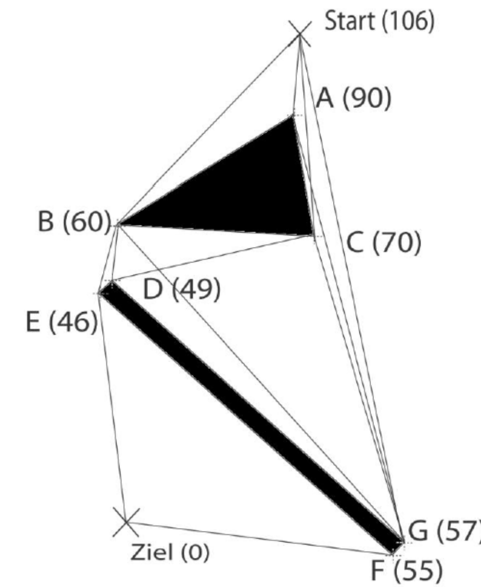


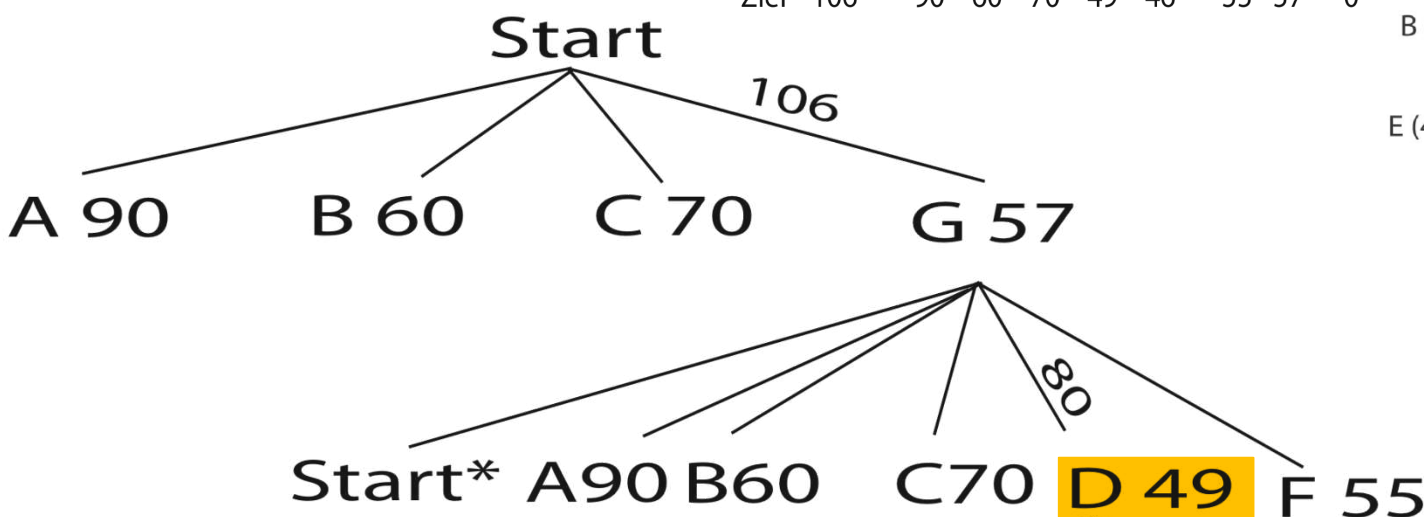


106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

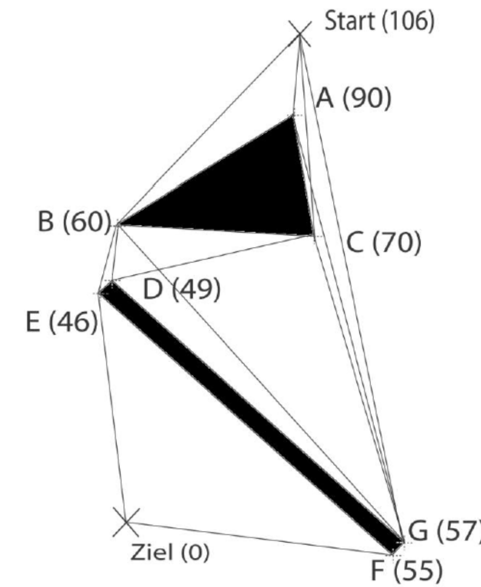


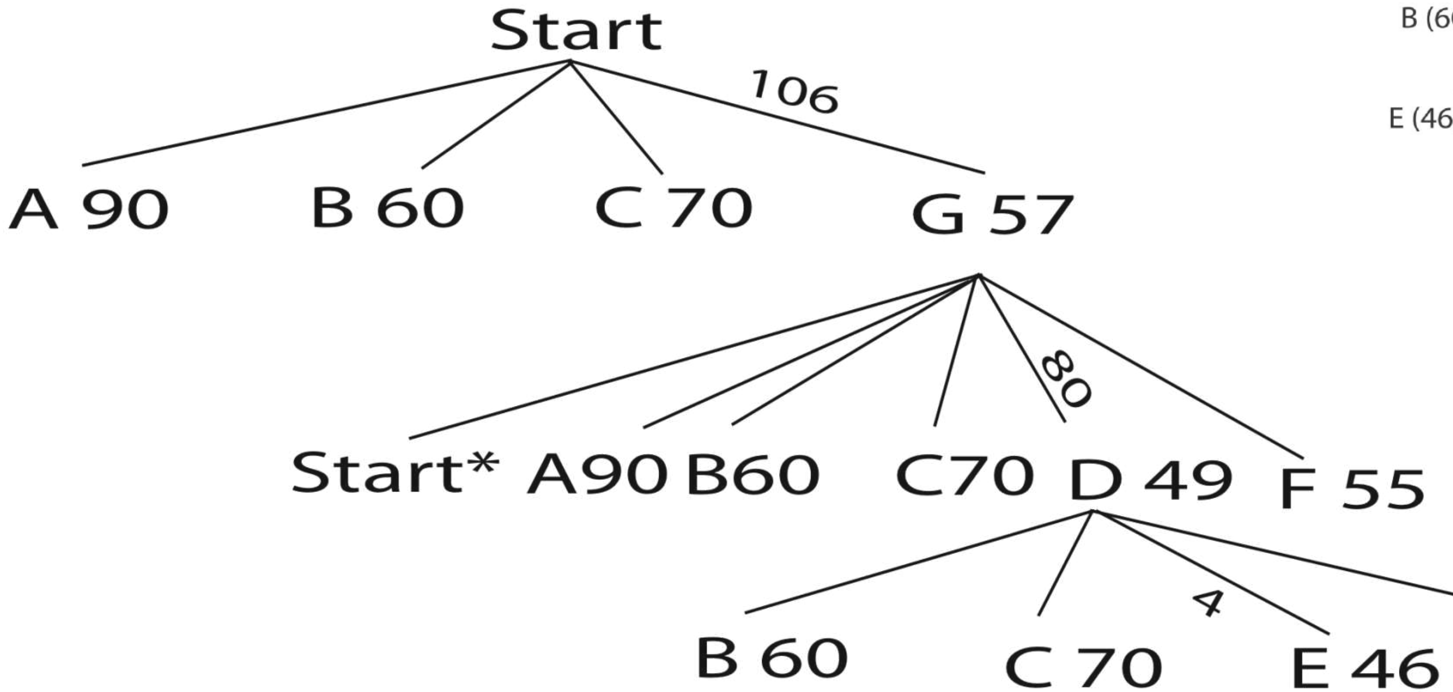


106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

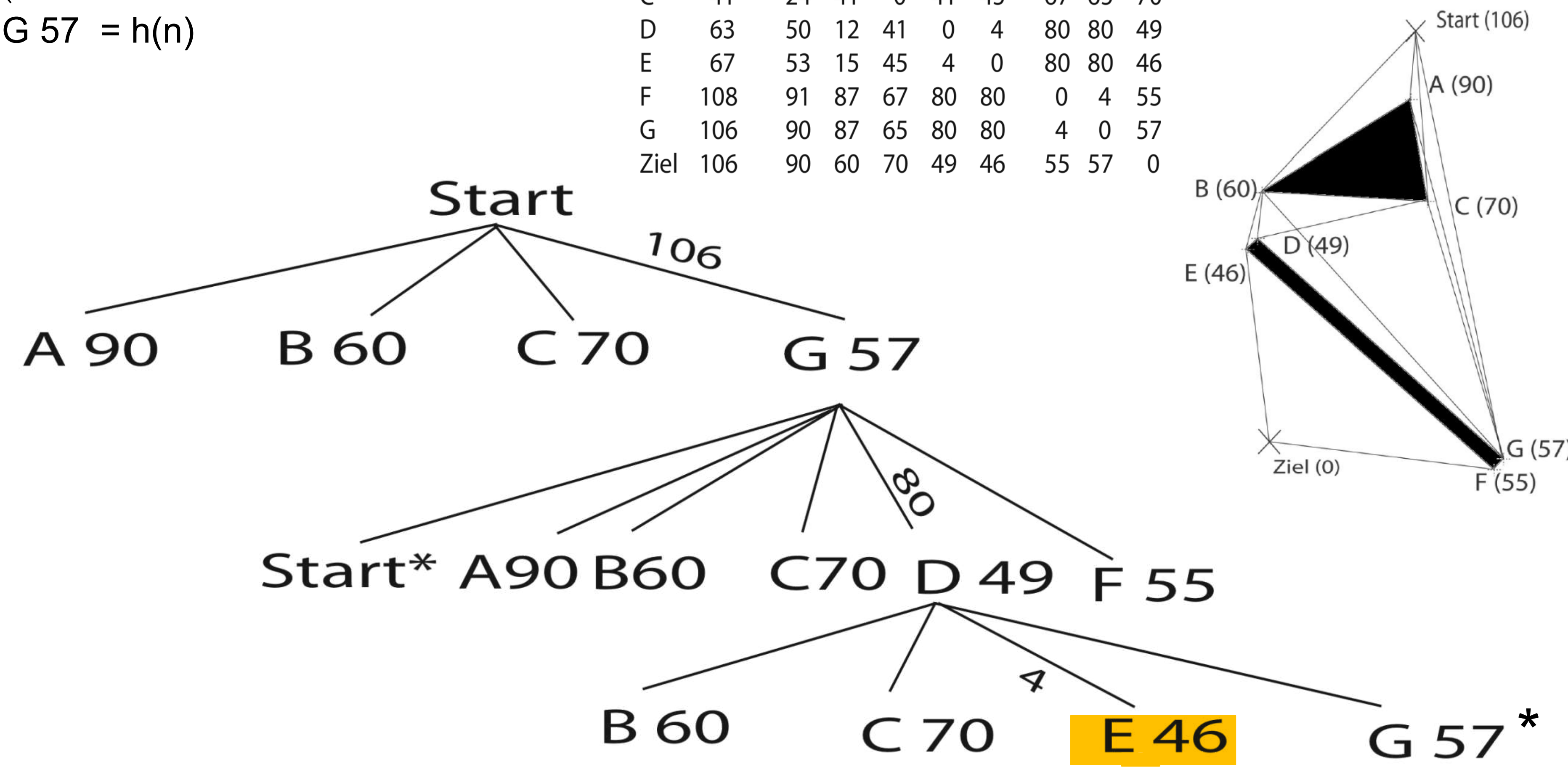




106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

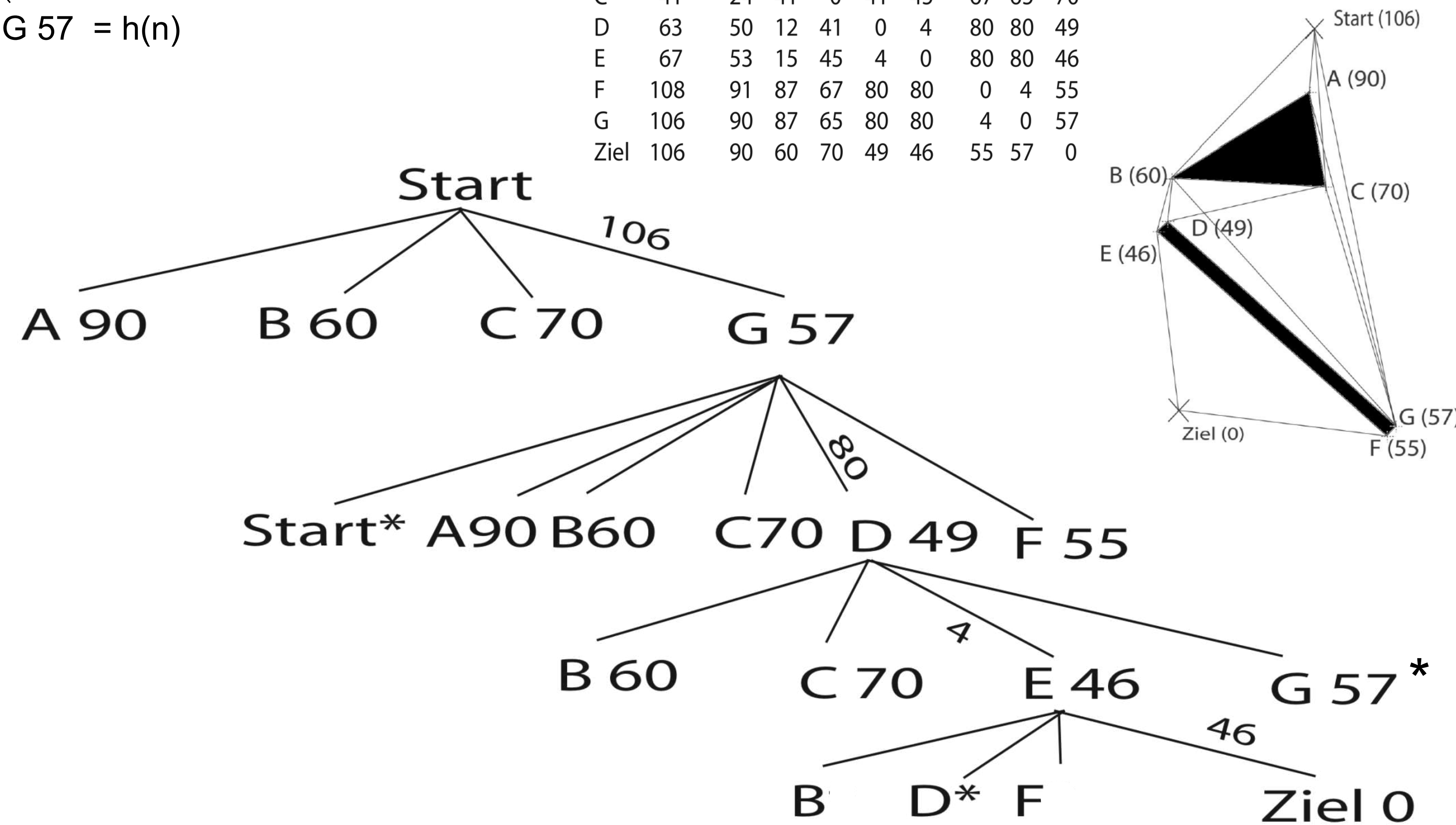
	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0



106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

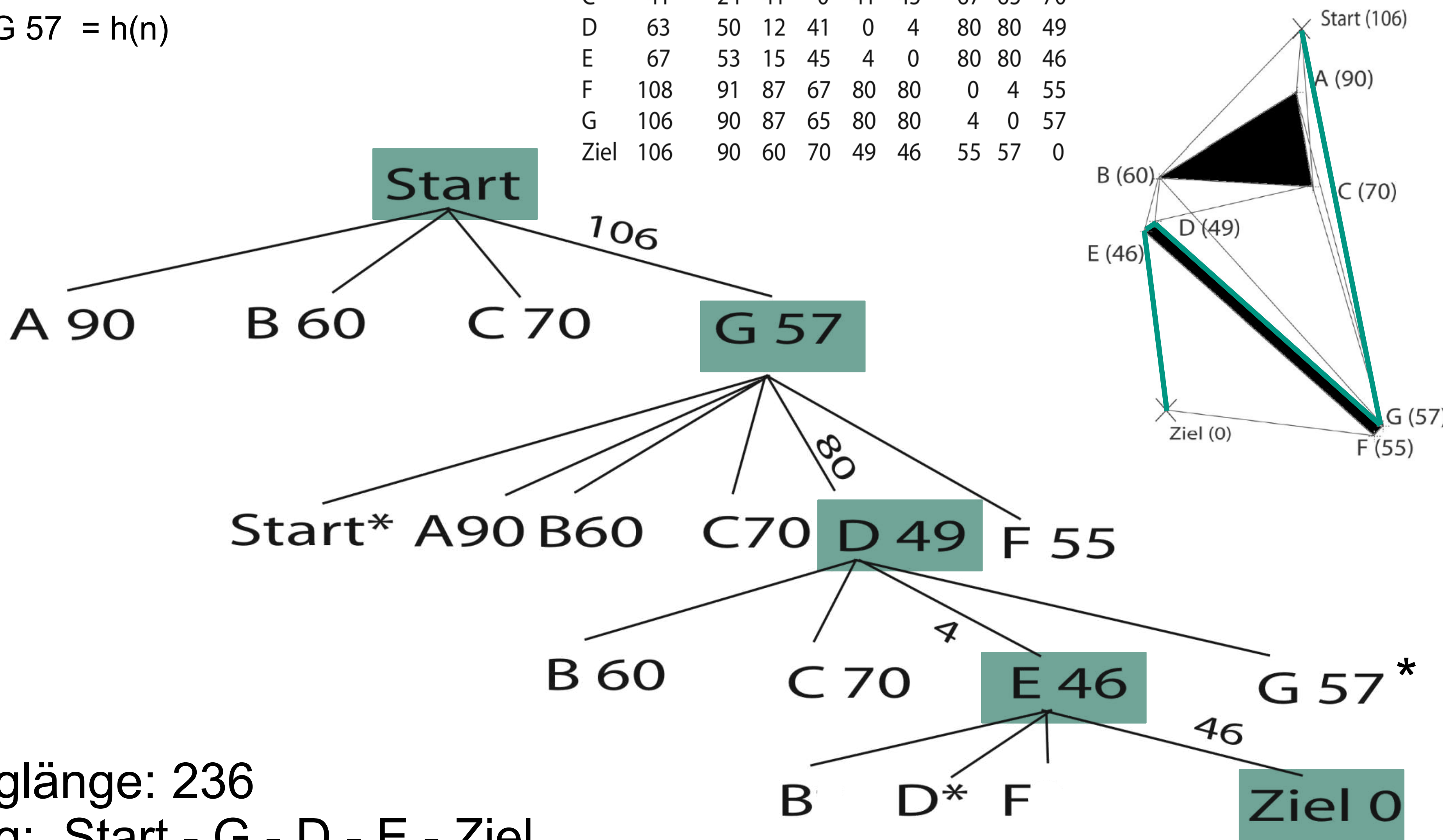


Karlsruher Institut für Technologie

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

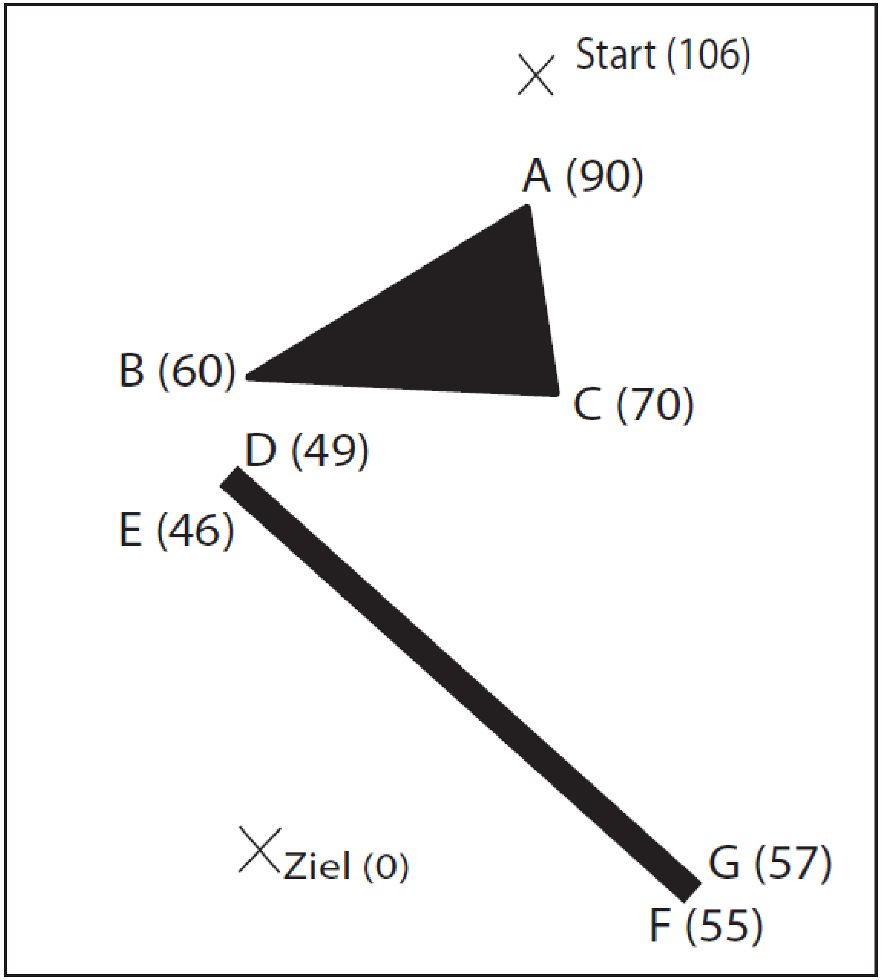


Weglänge: 236

Weg: Start - G - D - E - Ziel

Planer: Greedy

Aufgabe 6.4.c - Bahnplanung



Distanzen zwischen den Punkten

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

2. Der Planer expandiert jeweils den Knoten n, bei dem die Evaluationsfunktion $f(n) = g(n) + h(n)$ minimal ist.

→ A*-Algorithmus

Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

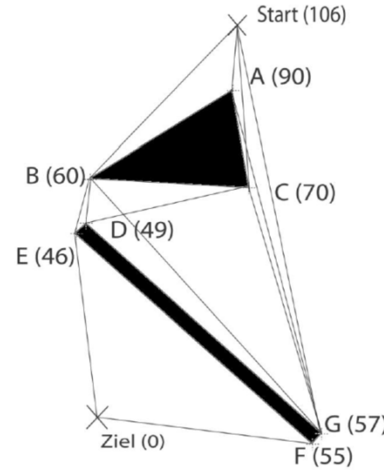
G 57 = h(n)
163 = f(n)

Start

17 54 41 106

A 90 B 60 C 70 G 57
107 114 111 163

Karlsruher Institut für Technologie



	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)
163 = f(n)

Start

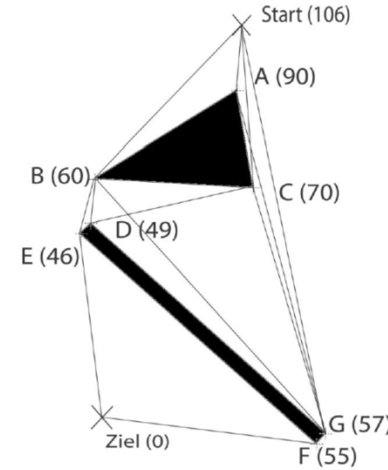
17 54 41 106

A 90
107

B 60
114

C 70
111

G 57
163



	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)
163 = f(n)

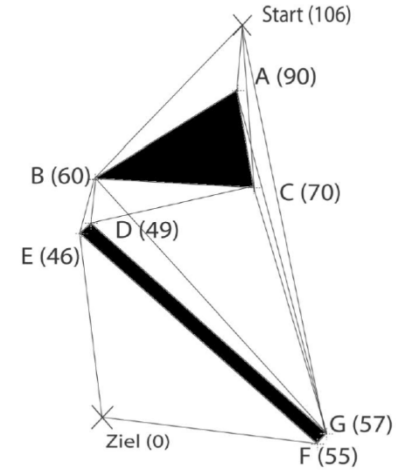
Start

17 54 41 106

A 90 B 60 C 70 G 57
107 114 111 163

43 24 90

*Start B 60 C 70 G 57
120 111 164



	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)
163 = f(n)

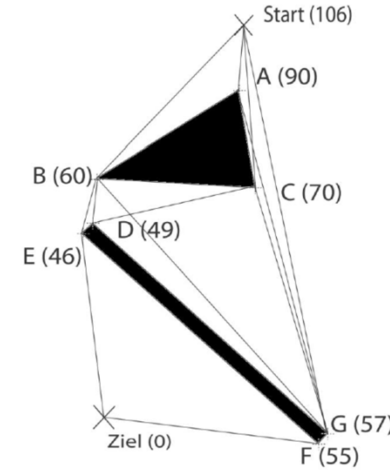
Start

17 54 41 106

A 90 107 | B 60 114 | C 70 111 | G 57 163

43 24 90

*Start | B 60 120 | C 70 111 | G 57 164



Laut Aufgabenstellung sollen keine Pfade weiterverfolgt werden, wenn bekannt ist, dass der gleiche Knoten auch durch gleiche oder geringere Kosten erreicht werden kann. Das ist in diesem Pfad der Fall, da C auch direkt von Start aus erreichbar ist (ohne Umweg über A)

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

163 = f(n)

Start

17 54 41 106

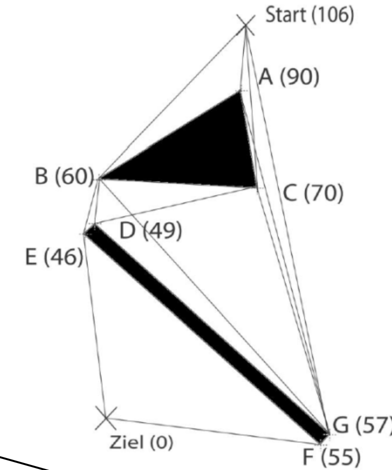
A 90 107 | B 60 114 | C 70 111 | G 57 163

43 24 90

*Start | B 60 120 | C 70 111 | G 57 164

24 41 41 65

*Start | A 90 155 | B 60 142 | D 49 131 | G 57 163



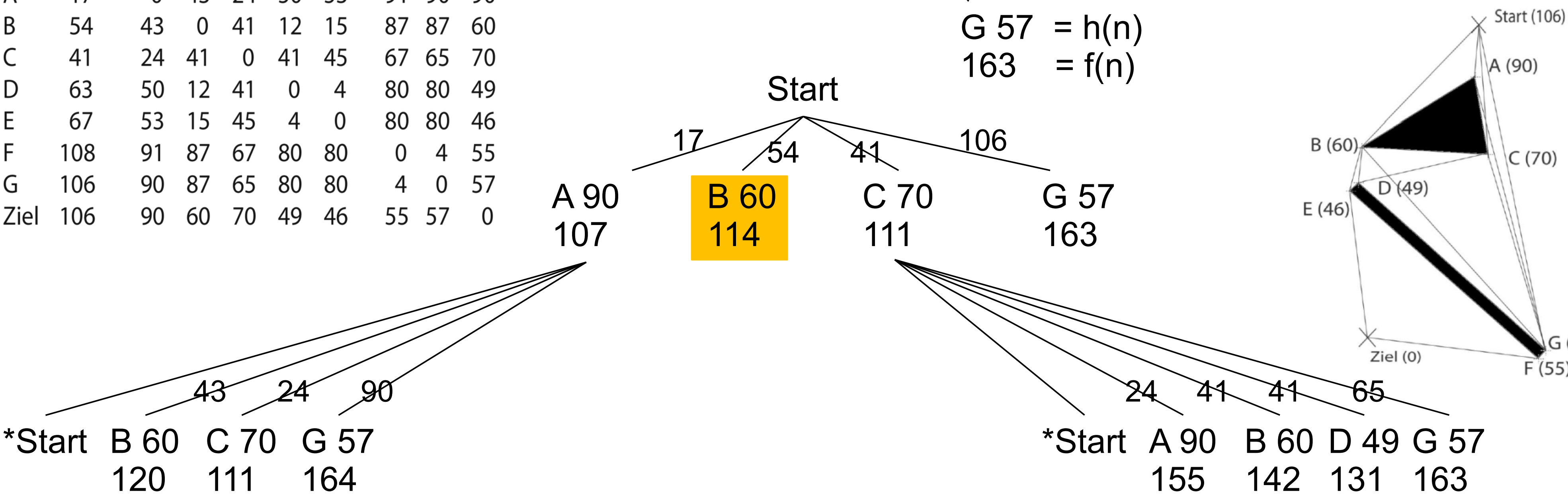
Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)

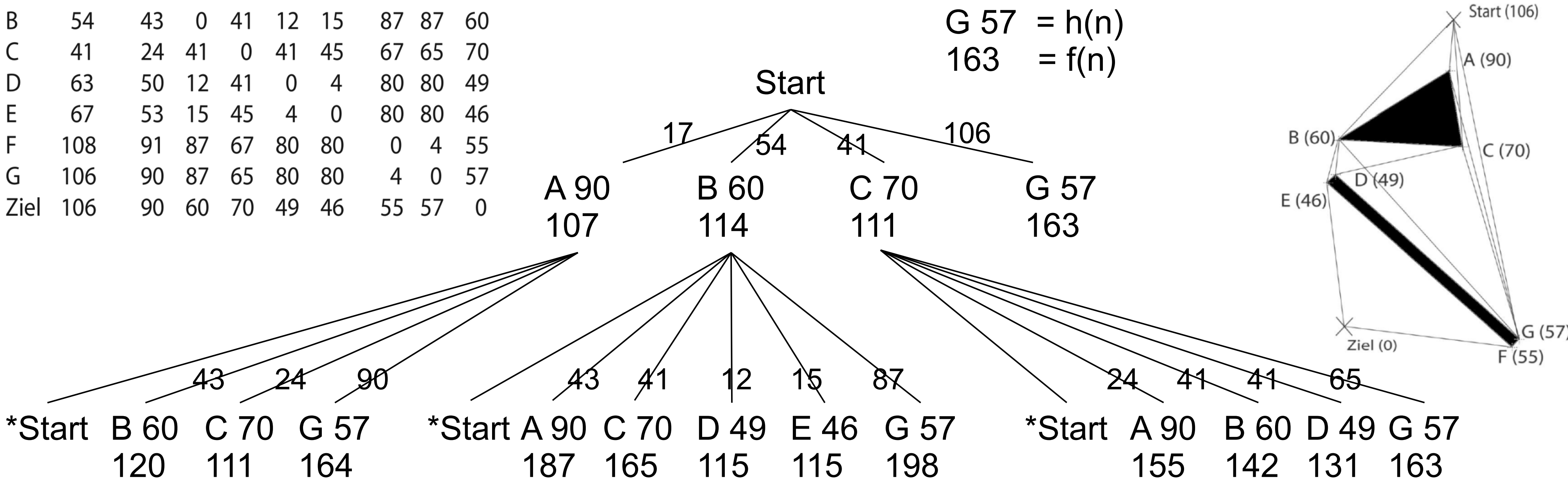
163 = f(n)



	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

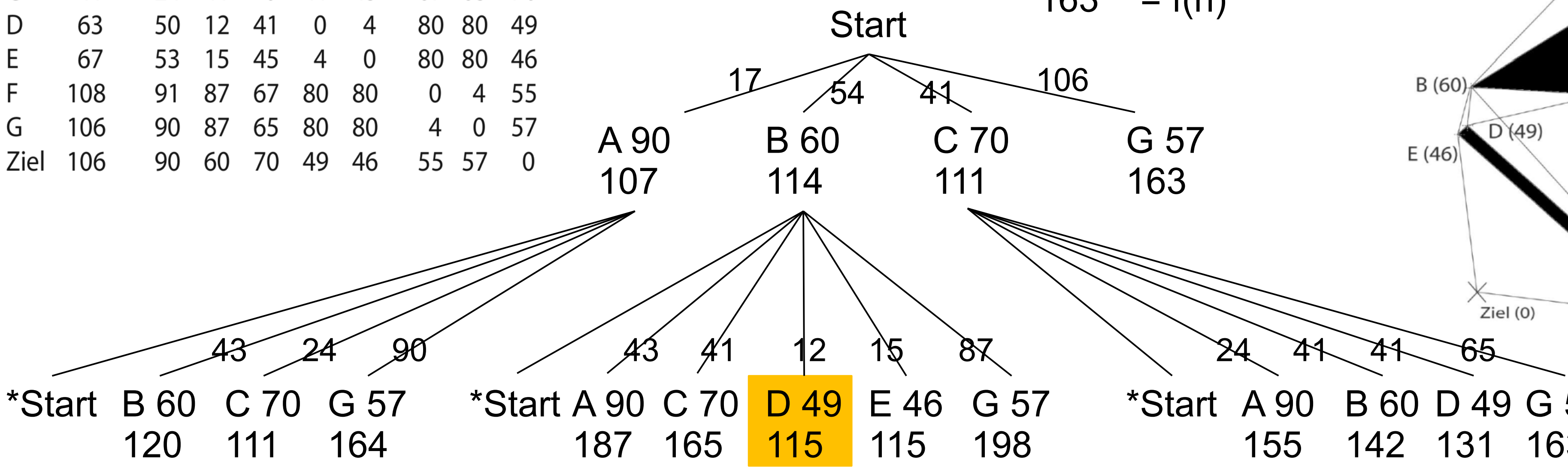
G 57 = h(n)
163 = f(n)

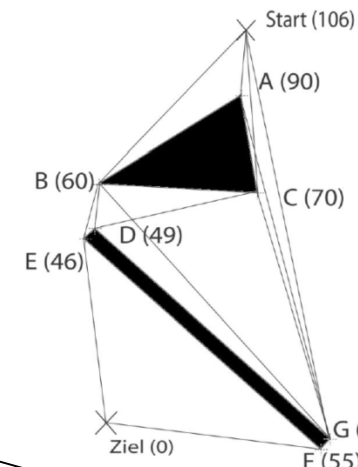


	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)
163 = f(n)



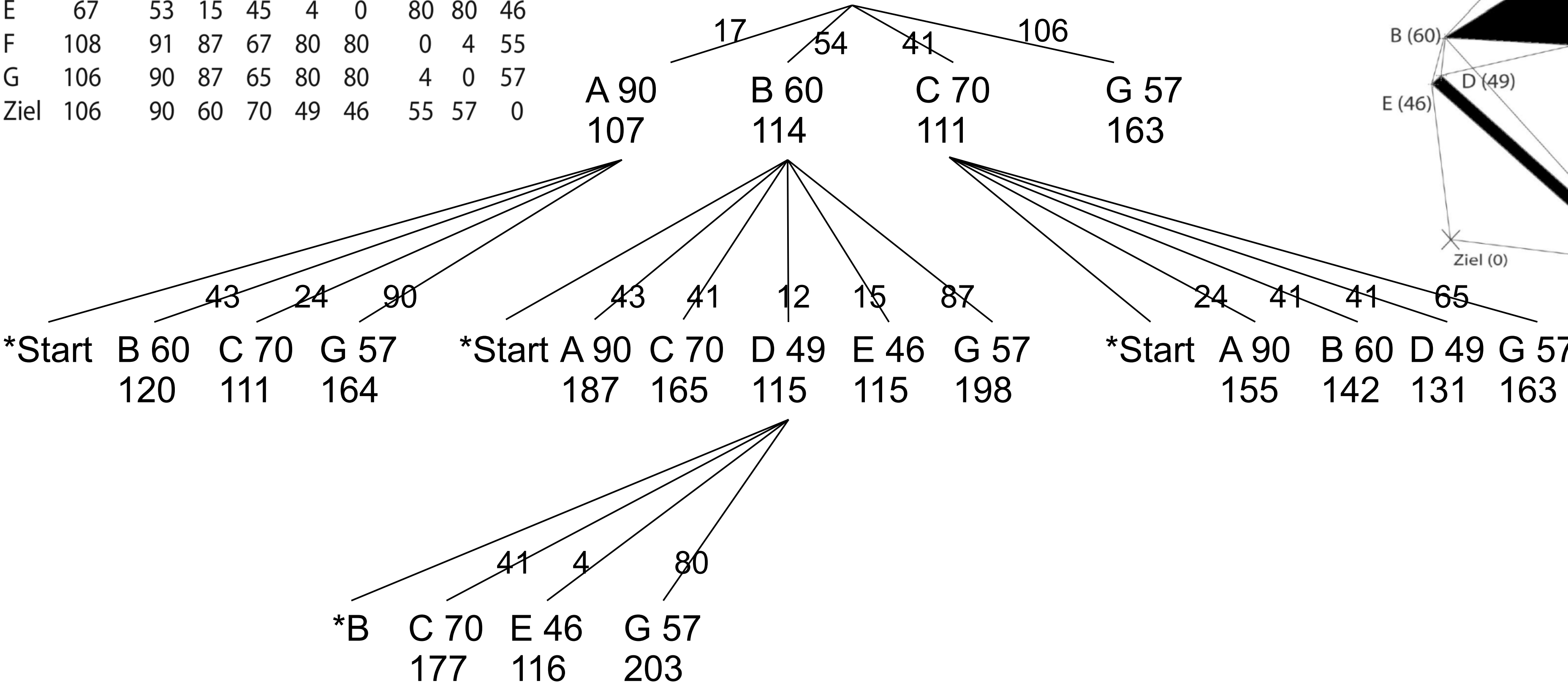


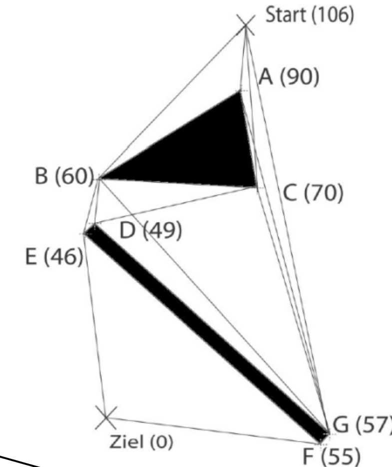
Institut für Anthropomatik und Robotik
Humanoids and Intelligence Systems Lab

	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

G 57 = h(n)
163 = f(n)

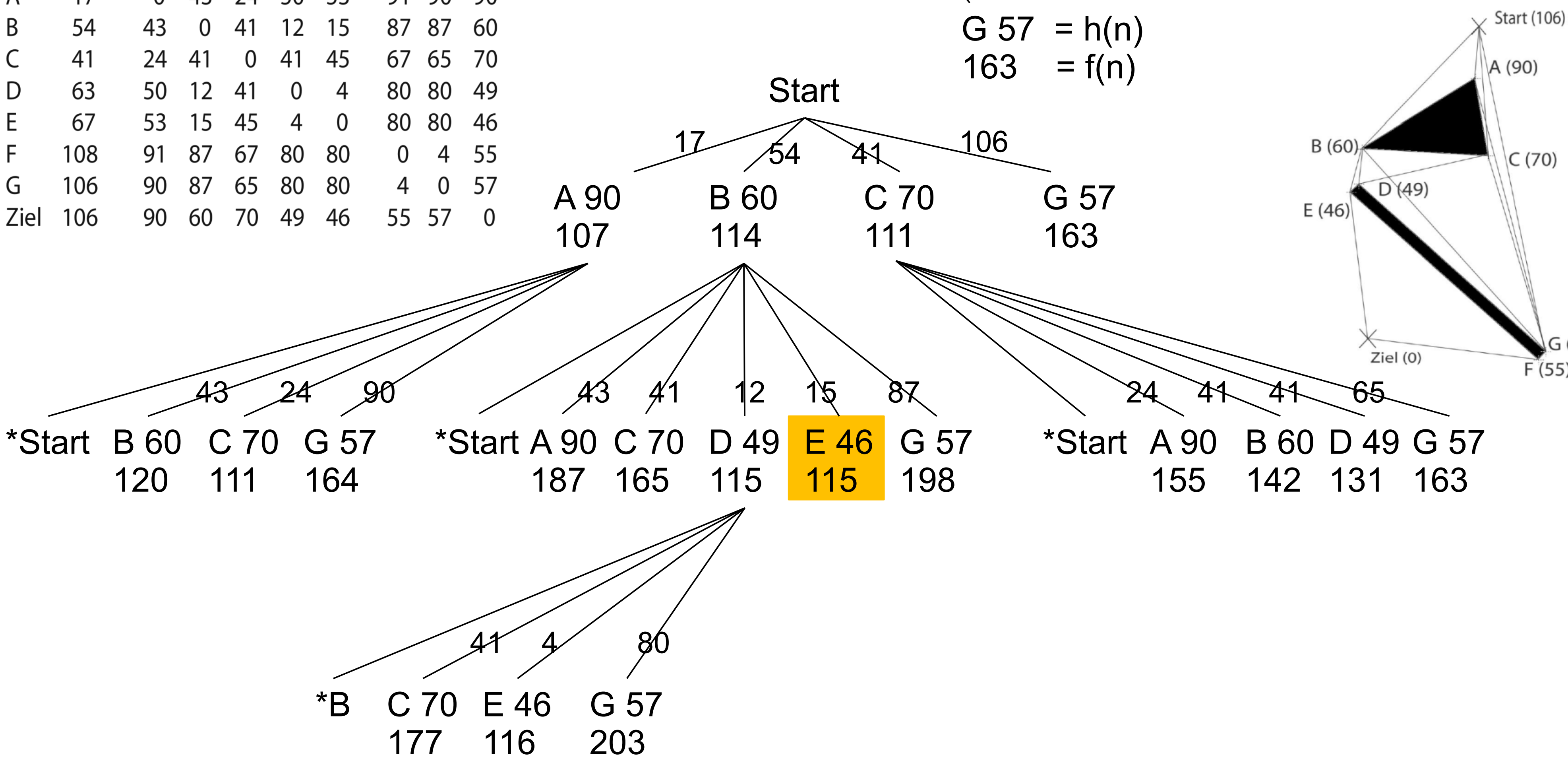




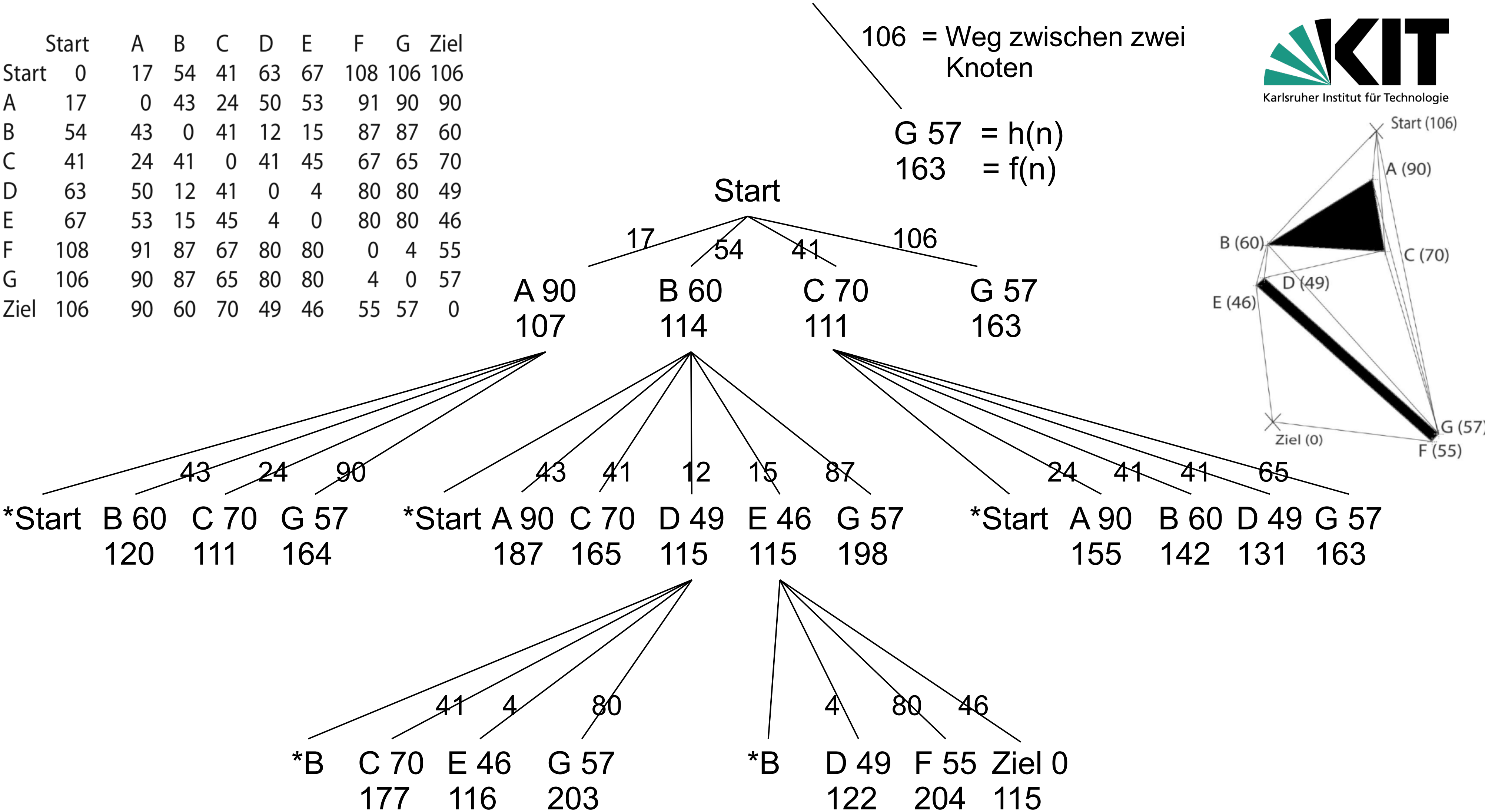
	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

106 = Weg zwischen zwei Knoten

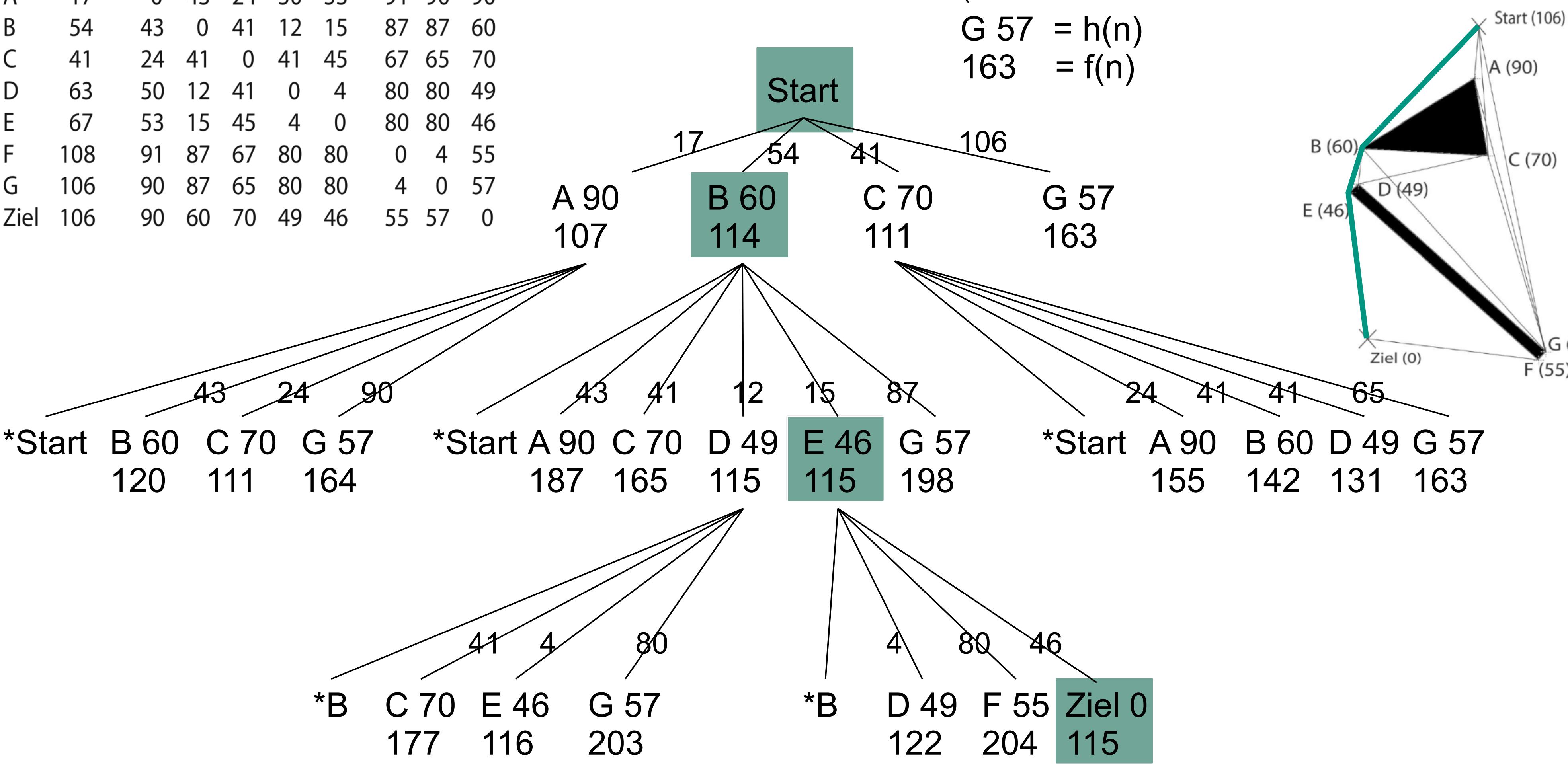
G 57 = h(n)
163 = f(n)



	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0

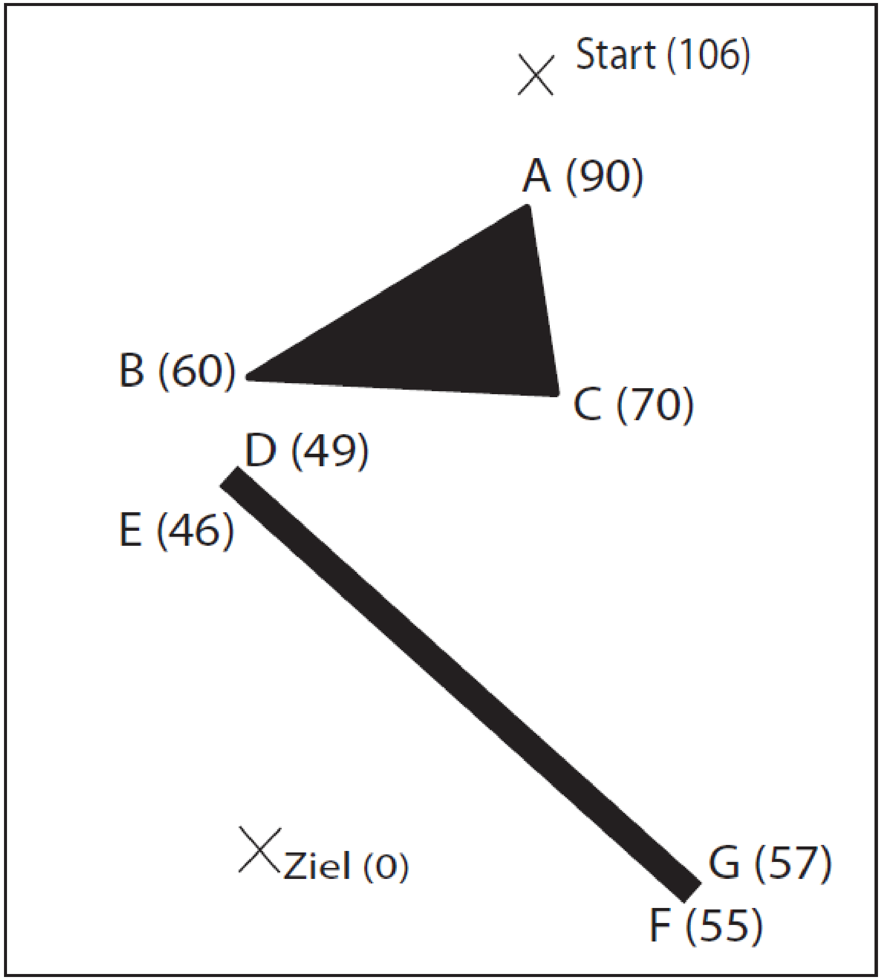


	Start	A	B	C	D	E	F	G	Ziel
Start	0	17	54	41	63	67	108	106	106
A	17	0	43	24	50	53	91	90	90
B	54	43	0	41	12	15	87	87	60
C	41	24	41	0	41	45	67	65	70
D	63	50	12	41	0	4	80	80	49
E	67	53	15	45	4	0	80	80	46
F	108	91	87	67	80	80	0	4	55
G	106	90	87	65	80	80	4	0	57
Ziel	106	90	60	70	49	46	55	57	0



Weglänge: 115 (***Onlinefrage Nr. 4***)
Weg: Start - B - E - Ziel
Planer: A*

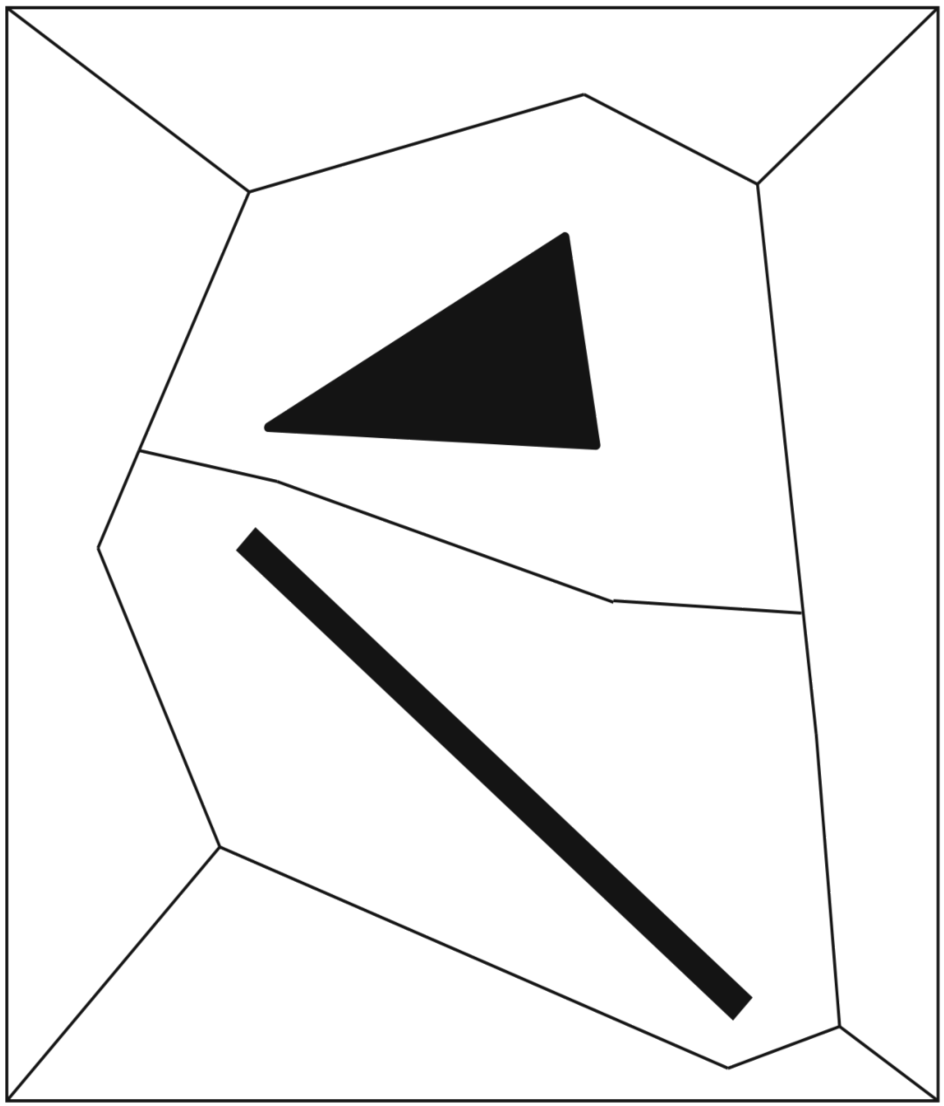
Aufgabe 6.4.d - Bahnplanung



- Voronoi-Diagramm?

Die Ränder der Fläche verlaufen genau in mittlerer Entfernung zwischen den beiden nächstliegenden Hindernissen.

Aufgabe 6.4.d - Bahnplanung



Aufgabe 6.5

Quaternionen

Aufgabe 6.5.a - Quaternionen

Gegeben sei das Quaternion $q_1 = (s, (x, y, z)) = (2, (4, -3, 0))$. Berechnen Sie das multiplikativ inverse Quaternion q_1^{-1}.

$$q_1^{-1} = \frac{\bar{q}_1}{|q_1|^2}$$

$$\bar{q}_1 = (2, (-4, 3, 0))$$

$$|q_1|^2 = 4 + 16 + 9 = 29$$

$$q_1^{-1} = \frac{\bar{q}_1}{|q_1|^2} = \left(\frac{2}{29}, (-\frac{4}{29}, \frac{3}{29}, 0)\right)$$

Aufgabe 6.5.b - Quaternionen

Rotieren Sie den Punkt $\vec{x} = (0,0,3)$ mit dem Quaternion $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0))$.

$$\begin{aligned}
\vec{x'} &= q_2 x \bar{q}_2 \\
&= (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i) \cdot 3k \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) \\
&= (\frac{3\sqrt{2}}{2} k - \frac{3\sqrt{2}}{2} j) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) \\
&= \frac{3}{2} k - \frac{3}{2} j - \frac{3}{2} j - \frac{3}{2} k \\
&= -3j \\
\Rightarrow \vec{x'} &= (0, -3, 0)
\end{aligned}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k$$

$$ijk = -1 \quad ji = -k$$

$$jk = i$$

$$kj = -i$$

$$ki = j$$

$$ik = -j$$

Onlinefrage Nr. 5:

Mit Quaternionen lassen sich nur Rotationen darstellen.

Prüfung im SS 2019:

Dienstag, 20.09.2019, um 11:30 Uhr

…Termin für Nachklausur wird auf den üblichen Kanälen bekannt gegeben (ILIAS, IAR Homepage)